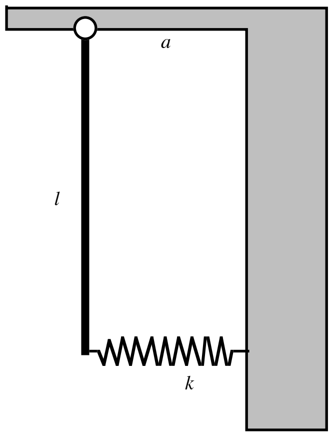
Kungl Tekniska Högskolan 2002 04 11
Institutionen för Mekanik

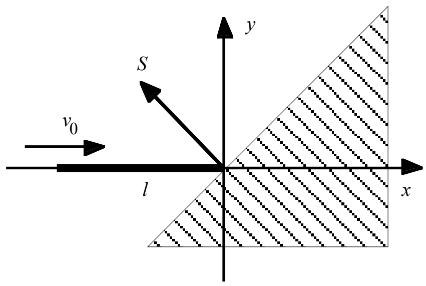
Analytisk mekanik för MMT, 5C1121

Tentamen, 2002 04 11, kl 14.00-18.00

Räkneproblem

Uppgift 1: En pendel består av en smal homogen stav, av längd l och massa m. Den kan svänga kring sin ena ände. Denna ände är upphängd i en fix led så att staven kan svänga fritt i ett vertikalplan med jämviktsläge rakt ned. I stavens nedre ände är en lätt fjäder, med styvhet k, fäst. Dess andra ände är fixerad så att fjädern ligger i samma vertikalplan som pendeln kan svänga. Fjädern är horisontell och har sin obelastade längd, a, när pendeln hänger rakt ned. Tag fram rörelseekvationen med Lagranges metod och beräkna svängningstiden för små svängningar.





Uppgift 2: En smal homogen stav av längd l, och massa m rör sig i ett glatt horisontalplan med hastighet parallell med staven (x-axeln) och beloppet v_0. Den kolliderar elastiskt (bevarad energi!) med en fix glatt rak vägg i planet som bildar vinkeln 45° med staven. Beräkna stavens hastighet och vinkelhastighet omedelbart efter kollisionen. Beräkna även storleken, S, på stötimpulsen från väggen på staven.

Uppgift 3: En partikel av massa m har vid läget (x, y, z) den potentiella energin

$$U(x,y,z) = \frac{3}{2}A(x-a)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}A(x-a)(y-b) + A(y-b)^2 + \frac{1}{2}C(z-c)^2.$$

Beräkna partikelns rörelse i lämpliga generaliserade koordinater. A och C är positiva konstanter (av dimension kraft per längd).

Vänd

Idéproblem:

Uppgift 4: En enkel rotation är en rotation en viss vinkel kring en av koordinataxlarna. Skriv upp rotationsmatriser som svarar mot en enkel rotation kring x-axeln en vinkel θ, och kring z-axeln en vinkel ψ. Hur kan man få en godtycklig rotationsmatris genom att multiplicera sådana matriser?

Uppgift 5: Huvudtröghetsmomenten för ett partikelsystem är

$$J_x = \frac{m}{2}(b^2 + 2c^2), \qquad J_y = \frac{m}{2}(a^2 + 2c^2), \qquad J_z = \frac{m}{2}(a^2 + b^2).$$

när origo ligger i systemets masscentrum. m är totala massan. Ange ett fyrpartikelsystem (massorna m_i och lägena $\boldsymbol{r}_i$ i Cartesiska koordinater, $i = 1, 2, 3, 4$) som har denna tröghetstensor.

Uppgift 6: Kinetiska energin för ett system med tidsoberoende holonoma tvång kan skrivas

$$T(q, \dot{q}) = \sum_{a=1}^{n} \sum_{b=1}^{n} \frac{1}{2} g_{ab}(q) \dot{q}_a \dot{q}_b.$$

Härled uttrycket för systemets generaliserade rörelsemängder $p_a = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a}$.

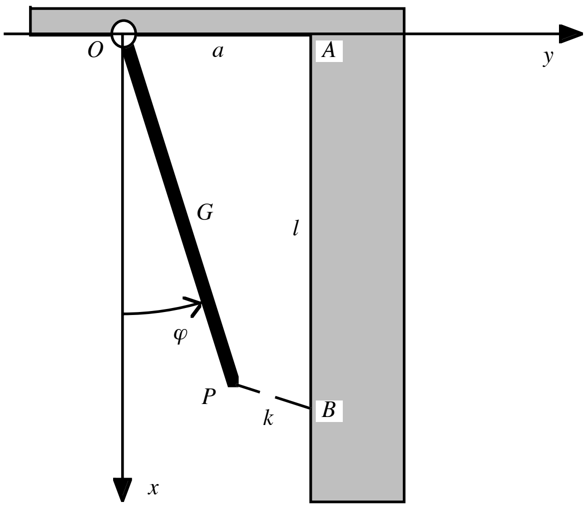
Varje uppgift ger högst 3 poäng. För godkänt fordras minst tre poäng på vardera räkne- och idéproblemen.

Tillåtna hjälpmedel: Mathematics Handbook (av Råde & Westergren och/eller av Spiegel) och Physics Handbook och/eller TEFYMA eller andra tabeller med tyngdpunkter och tröghetsmoment.

HE 02 04 11

Lösningar Räkneproblem

Uppgift 1: En pendel består av en smal homogen stav, av längd l och massa m. Den kan svänga kring sin ena ände. Denna ände är upphängd i en fix led så att staven kan svänga fritt i ett vertikalplan med jämviktsläge rakt ned. I stavens nedre ände är en lätt fjäder, med styvhet k, fäst. Dess andra ände är fixerad så att fjädern ligger i samma vertikalplan som pendeln kan svänga. Fjädern är horisontell och har sin obelastade längd, a, när pendeln hänger rakt ned. Tag fram rörelseekvationen med Lagranges metod och beräkna svängningstiden för små svängningar.



Lösning 1: Med koordinater enligt figuren har vi

$$\boldsymbol{r}_P = l(\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_y), \qquad \boldsymbol{r}_B = l\,\boldsymbol{e}_x + a\,\boldsymbol{e}_y.$$

Avståndet mellan dessa punkter är fjäderns längd, $\ell(\varphi)$, fås

$$\ell^2(\varphi) = |\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_B|^2 = (l\cos\varphi - l)^2 + (l\sin\varphi - a)^2 = 2l^2(1-\cos\varphi) - 2al\sin\varphi + a^2.$$

Fjäderns potentiella energi är då $V_k(\varphi) = \frac{1}{2}k[\ell(\varphi) - a]^2$. Tyngdkraftens potentiella energi är $V_g(\varphi) = -(mgl/2)\cos\varphi$. Totala potentiella energin är då

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{2l^2(1-\cos\varphi) - 2al\sin\varphi + a^2} - a\right)^2 - \frac{mgl}{2}\cos\varphi$$

Kinetiska energin är $T(\dot\varphi) = \frac{1}{2}J_O\dot\varphi^2 = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot\varphi^2$ och således är Lagrangefunktionen, $T - V$,

$$\textbf{Svar}: L(\varphi,\dot\varphi) = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot\varphi^2 - \frac{1}{2}\left[k\left(\sqrt{2l^2(1-\cos\varphi) - 2al\sin\varphi + a^2} - a\right)^2 - mgl\cos\varphi\right]$$

Vid små svängningar kan man sätta $\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \ldots$ och $\sin\varphi \approx \varphi - \ldots$, och behålla upp till kvadratiska termer i V. Detta ger

$$V = -\frac{1}{2}mgl + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mgl + kl^2\right)\varphi^2 + \ldots$$

Lagrangefunktionen kan nu skrivas $L = \frac{1}{2}(M\dot\varphi^2 - K\varphi^2)$, med $M = \frac{ml^2}{3}$ och $K = \frac{1}{2}mgl + kl^2$. Vinkelfrekvensen för svängningarna är då $\omega = \sqrt{K/M} = \sqrt{\frac{3g}{2l} + \frac{3k}{m}}$ så att svängningstiden, eller perioden, är, **Svar:** $2\pi/\sqrt{\frac{3g}{2l} + \frac{3k}{m}}$.

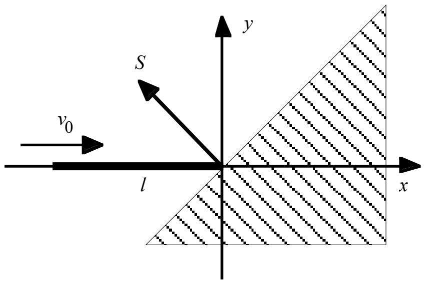
Uppgift 2: En smal homogen stav av längd l, och massa m rör sig i ett glatt horisontalplan med hastighet parallell med staven (x-axeln) och beloppet v_0. Den kolliderar elastiskt (bevarad energi!) med en fix glatt rak vägg i planet som bildar vinkeln 45° med staven. Beräkna stavens hastighet och vinkelhastighet omedelbart efter kollisionen. Beräkna även storleken, S, på stötimpulsen från väggen på staven.
Lösning 2: Vi använder impuls och impulsmoment, dvs. ekvationerna

$$\boldsymbol{p}_\mathrm{f} - \boldsymbol{p}_\mathrm{i} = \boldsymbol{S},$$

där $\boldsymbol{p}_\mathrm{f} = m\boldsymbol{v}_G$ och $\boldsymbol{p}_\mathrm{i} = mv_0\boldsymbol{e}_x$, och

$$\boldsymbol{L}_\mathrm{f} - \boldsymbol{L}_\mathrm{i} = \overline{GP} \times \boldsymbol{S},$$

där $\boldsymbol{L}_\mathrm{f} = J_G\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_z$ och $\boldsymbol{L}_\mathrm{i} = \boldsymbol{0}$. Här är G stavens mittpunkt och P den ände som är i kontakt med väggen. Geometrin ger att $\boldsymbol{S} = \frac{S}{\sqrt{2}}(-\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)$ så impulsekvationen ger de två



komponentekvationerna

$$m\dot{x} - mv_0 = -\frac{S}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad \dot{x} = v_0 - \frac{S}{m\sqrt{2}}$$

$$m\dot{y} = \frac{S}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad \dot{y} = \frac{S}{m\sqrt{2}}$$

för tyngdpunktens hastighet ($\boldsymbol{v}_G = \dot{x}\,\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\,\boldsymbol{e}_y$) efter stöten. Då $\overline{GP} = \frac{l}{2}\boldsymbol{e}_x$ ger impulsmomentekvationen

$$m\frac{l^2}{12}\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_z = \frac{lS}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_z$$

Denna ekvation ger vinkelhastigheten genast efter stöten $\dot{\varphi} = \frac{6}{l\sqrt{2}}\frac{S}{m}$.

För att bestämma beloppet, S, av stötimpulsen använder vi energins bevarande som är uppfyllt då stöten antages elastisk. Före stöten har vi $T_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ och efter får vi $T_1 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}J_G\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m\left[\left(v_0 - \frac{S}{m\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{S}{m\sqrt{2}}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\left(\frac{6}{l\sqrt{2}}\frac{S}{m}\right)^2$. Ur ekvationen $T_1 - T_0 = 0$ fås nu

$$-\frac{1}{4m}S(-5S + 2\sqrt{2}mv_0) = 0,$$

och, om roten $S = 0$ förkastas, således $S = \frac{2\sqrt{2}}{5}mv_0$. Sätter nu in detta värde på S ovan får vi:
Svar: $S = \frac{2\sqrt{2}}{5}mv_0$, och således $\dot{x} = \frac{3}{5}v_0$, $\dot{y} = \frac{2}{5}v_0$, och $\dot{\varphi} = \frac{12}{5}\frac{v_0}{l}$.

Uppgift 3: En partikel av massa m har vid läget (x, y, z) den potentiella energin

$$U(x,y,z) = \frac{3}{2}A(x-a)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}A(x-a)(y-b) + A(y-b)^2 + \frac{1}{2}C(z-c)^2.$$

Beräkna partikelns rörelse i lämpliga generaliserade koordinater. A och C är positiva konstanter (av dimension kraft per längd).

Lösning 3: Man inser potentialen har ett absolut minimum i punkten $x = a, y = b, z = c$, så den måste vara ett stabilt jämviktsläge. Eftersom potentialen är rent kvadratisk måste rörelsen vara kopplade harmoniska svängningar kring detta läge. Vi inför de generaliserade koordinaterna

$$u = x - a, \ v = y - b, \ w = z - c,$$

som är noll vid jämviktsläget.

Vi får nu systemets Lagrangefunktion

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) - \frac{1}{2}\left(3Au^2 + \sqrt{3}Auv + 2Av^2 + Cw^2\right)$$

Vi får då att massmatrisen blir $\mathbf{M} = m\mathbf{1}$ medan styvhetsmatrisen blir

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 3A & \frac{\sqrt{3}}{2}A & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}A & 2A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Vi måste alltså lösa sekularekvationen $|\mathbf{K} - \mathbf{M}x| = 0$, där $x = \omega^2$. Vi får

$$\begin{vmatrix} 3A - mx & \frac{\sqrt{3}}{2}A & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}A & 2A - mx & 0 \\ 0 & 0 & C - mx \end{vmatrix} = (C - mx)\left[(3A - mx)(2A - mx) - \frac{3}{4}A^2\right] = 0$$

Rötterna blir

$$x_{1,2,3} = \omega_{1,2,3}^2 = \frac{3}{2}\frac{A}{m}, \frac{7}{2}\frac{A}{m}, \frac{C}{m}$$

. Vi måste nu lösa de tre ekvationerna $(\mathbf{K} - \mathbf{M}x_i)\mathbf{a}_i = \mathbf{0}, \ i = 1, 2, 3$. Man ser att

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}A & \frac{\sqrt{3}}{2}A & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}A & \frac{1}{2}A & 0 \\ 0 & 0 & C - \frac{3}{2}A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

för $i = 1$, och att

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}A & \frac{\sqrt{3}}{2}A & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}A & -\frac{3}{2}A & 0 \\ 0 & 0 & C - \frac{7}{2}A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3A - C & \frac{\sqrt{3}}{2}A & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}A & 2A - C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

för $i = 2$ respektive $i = 3$. Enligt teorin får vi då att **Svaret:** ges av

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \mathbf{u(t)} = \sum_{i=1}^{3} c_i \mathbf{a}_i \cos(\omega_i t + \phi_i) =$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{\frac{3}{2}\frac{A}{m}}t + \phi_1) + c_2 \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{\frac{7}{2}\frac{A}{m}}t + \phi_2) + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{\frac{C}{m}}t + \phi_3)$$

vilket alltså är en exakt lösning för den allmänna rörelsen hos systemet.

Uppgift 4: En enkel rotation är en rotation en viss vinkel kring en av koordinataxlarna. Skriv upp rotationsmatriser som svarar mot en enkel rotation kring x-axeln en vinkel θ, och kring z-axeln en vinkel ψ. Hur kan man få en godtycklig rotationsmatris genom att multiplicera sådana matriser?
Lösning 4: Se lämplig teoritext.

Uppgift 5: Huvudtröghetsmomenten för ett partikelsystem är

$$J_x = \frac{m}{2}(b^2 + 2c^2), \qquad J_y = \frac{m}{2}(a^2 + 2c^2), \qquad J_z = \frac{m}{2}(a^2 + b^2).$$

när origo ligger i systemets masscentrum. m är totala massan. Ange ett fyrpartikelsystem (massorna m_i och lägena $\boldsymbol{r}_i$ i Cartesiska koordinater, $i = 1, 2, 3, 4$) som har denna tröghetstensor.
Lösning 5:
Om alla partiklar har massa $m_i = m/4$ och lägesvektorerna är

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_1 &= (\ a,\ 0,\ c), \\
\boldsymbol{r}_2 &= (-a,\ 0,\ c), \\
\boldsymbol{r}_3 &= (\ 0,\ b, -c), \\
\boldsymbol{r}_4 &= (\ 0, -b, -c).
\end{aligned}$$

så får man att tröghetstensorn har komponenterna

$$\begin{aligned}
D_{xy} &= \sum m_i x_i y_i = \frac{m}{4}(a \cdot 0 - a \cdot 0 + 0 \cdot b - 0 \cdot b) = 0 \\
D_{xz} &= \sum m_i x_i z_i = \frac{m}{4}(a \cdot c - a \cdot c - 0 \cdot c - 0 \cdot c) = 0 \\
D_{yz} &= \sum m_i y_i z_i = \frac{m}{4}(0 \cdot c + 0 \cdot c - b \cdot c + b \cdot c) = 0 \\
J_x &= \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) = \frac{m}{4}(2b^2 + 4c^2) \\
J_y &= \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) = \frac{m}{4}(2a^2 + 4c^2) \\
J_z &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \frac{m}{4}(2a^2 + 2b^2).
\end{aligned}$$

och detta är den efterfrågade tröghetstensorn.

Uppgift 6: Kinetiska energin för ett system med tidsoberoende holonoma tvång kan skrivas

$$T(q, \dot{q}) = \sum_{a=1}^{n} \sum_{b=1}^{n} \frac{1}{2} g_{ab}(q) \dot{q}_a \dot{q}_b.$$

Härled uttrycket för systemets generaliserade rörelsemängder $p_a = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a}$.
Lösning 6: Då

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} \dot{q}_b = \delta_{ab} = (1 \text{ om } a = b,\ 0 \text{ om } a \neq b)$$

får vi

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \frac{1}{2} \sum_{bc} g_{bc}(q)\ (\delta_{ab} \dot{q}_c + \dot{q}_b \delta_{ac}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{bc} g_{bc}(q)\, \delta_{ab} \dot{q}_c + \sum_{bc} g_{bc}(q)\, \dot{q}_b \delta_{ac} \right).$$

Således har vi

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \frac{1}{2} \left(\sum_{c} g_{ac}(q)\, \dot{q}_c + \sum_{b} g_{ba}(q)\, \dot{q}_b \right).$$

Då $g_{ba}(q) = g_{ab}(q)$, fås till sist **Svar:**

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \frac{1}{2} \left(\sum_{b} g_{ab}(q)\, \dot{q}_b + \sum_{b} g_{ab}(q)\, \dot{q}_b \right) = \sum_{b} g_{ab}(q)\, \dot{q}_b.$$

Hanno Essén (2002 04 11)