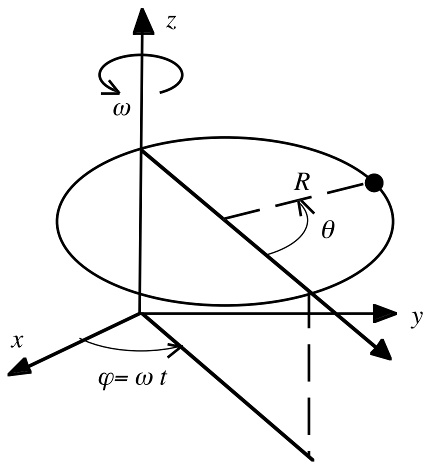
Kungl Tekniska Högskolan
Institutionen för Mekanik

2001 03 05

Lösningar till
Analytisk mekanik för MMT, 5C1121
Tentamen, 2001 03 05, kl 09.00-13.00

Räkneproblem

Uppgift 1: En ring av ståltråd, med radien R, är fäst i horisontellt läge på en vertikal roterande axel. På ringen kan en liten pärla glida med försumbar friktion. Den vertikala axeln roterar med den konstanta vinkelhastigheten ω. Tag fram rörelseekvationen för pärlan. Lämplig generaliserad koordinat är vinkeln θ mellan radien från ringens mittpunkt till pärlan och radien från mittpunkten till punkten längst från rotationsaxeln.



Lösning 1: Låt $\varphi = \omega t$ vara vinkeln mellan ringens diameter från rotationsaxeln och x-axeln. Inför rörliga basvektoer $\boldsymbol{e}_\rho(\varphi) = \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_y$ och $\boldsymbol{e}_\rho(\varphi+\theta) = \cos(\varphi+\theta)\boldsymbol{e}_x + \sin(\varphi+\theta)\boldsymbol{e}_y$ samt motsvarande vinkelräta vektorer $\boldsymbol{e}_\varphi(\varphi)$ och $\boldsymbol{e}_{\varphi+\theta}(\varphi+\theta)$ så att $\dot{\boldsymbol{e}}_\rho(\varphi) = \dot\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi(\varphi)$ och $\dot{\boldsymbol{e}}_\rho(\varphi+\theta) = (\dot\varphi+\dot\theta)\boldsymbol{e}_{\varphi+\theta}(\varphi+\theta)$. Pärlans läge kan då skrivas $\boldsymbol{r}(\theta,t) = R\boldsymbol{e}_\rho(\varphi) + R\boldsymbol{e}_\rho(\varphi+\theta)$ och hastigheten blir, då $\dot\varphi = \omega$,

$$\dot{\boldsymbol{r}} = R[\omega\boldsymbol{e}_\varphi(\varphi) + (\omega+\dot\theta)\boldsymbol{e}_{\varphi+\theta}(\varphi+\theta)].$$

Då ju $\boldsymbol{e}_\varphi\cdot\boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_{\varphi+\theta}\cdot\boldsymbol{e}_{\varphi+\theta} = 1$, och vinkeln mellan $\boldsymbol{e}_\varphi$ och $\boldsymbol{e}_{\varphi+\theta}$ är θ så att $\boldsymbol{e}_\varphi\cdot\boldsymbol{e}_{\varphi+\theta} = \cos\theta$, fås för kinetiska energin

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 = \frac{1}{2}mR^2[\omega^2 + 2\omega(\omega+\dot\theta)\cos\theta + (\omega+\dot\theta)^2].$$

I detta fall finns ingen potentiell energi eller generaliserad kraft så Lagranges ekvation blir

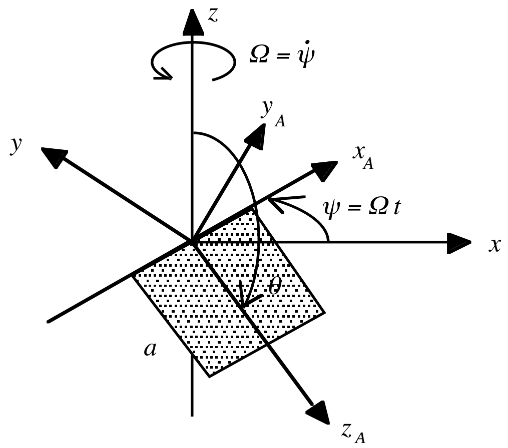
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial T}{\partial\theta} = 0.$$

Detta ger $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[mR^2\omega\cos\theta + mR^2(\omega+\dot\theta)] + mR^2\omega(\omega+\dot\theta)\sin\theta = 0$. Om mR^2 förkortas bort fås alltså, $-\omega\dot\theta\sin\theta + \ddot\theta + \omega^2\sin\theta + \omega\dot\theta\sin\theta = 0$, vilket ger

$$\textbf{Svar}: \ddot\theta = -\omega^2\sin\theta.$$

Lustigt nog fås samma ekvation som för en matematisk pendel med $g/l = \omega^2$.

Uppgift 2: En kvadratisk platta med sida a och massa m hänger med sin ena sida fäst i en horisontell axel kring vilken den kan rotera fritt. Denna horisontella axel roterar med konstant vinkelhastighet Ω kring en vertikal axel genom sidans mittpunkt. För små vinkelhastigheter Ω hänger plattan rakt ned men om Ω växer så finns också ett jämviktsläge som bildar en vinkel med vertikalen. Beräkna denna vinkel.



Lösning 2: Vi har en stel kropp som roterar kring fix punkt (mitten på den horisontella axeln). Inför ett kroppsfixt system av (huvud) axlar x_A, y_A, z_A, med origo i den fixa punkten, som följer med plattan i rotationen. Eulervinklarna för detta är $\psi = \Omega t, \theta = \text{konst.}, \varphi = 0$, relativt det rumsfixa x, y, z. Vinkelhastighetsvektorn är

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{e}_z = \Omega\boldsymbol{e}_z = \Omega(0\,\boldsymbol{e}_x^A + \sin\theta\,\boldsymbol{e}_y^A + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_z^A).$$

Eftersom $J_x^A = \frac{1}{3}ma^2$ och $J_z^A = \frac{1}{12}ma^2$ fås för den tunna plattan att $J_y^A = J_x^A + J_z^A = \frac{5}{12}ma^2$. Tröghetstensorns komponenter relativt de kroppsfixa axlarna är

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{12}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}ma^2 \end{pmatrix}.$$

Rörelsemängdsmomentet blir då

$$\boldsymbol{L} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \Omega\frac{1}{12}ma^2(0\,\boldsymbol{e}_x^A + 5\sin\theta\,\boldsymbol{e}_y^A + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_z^A)$$

Kraftmomentet ges av

$$\boldsymbol{M} = \frac{a}{2}\boldsymbol{e}_z^A \times (-mg\boldsymbol{e}_z) = -mg\frac{a}{2}[\boldsymbol{e}_z^A \times (\sin\theta\,\boldsymbol{e}_y^A + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_z^A)] = mg\frac{a}{2}\sin\theta\,\boldsymbol{e}_x^A.$$

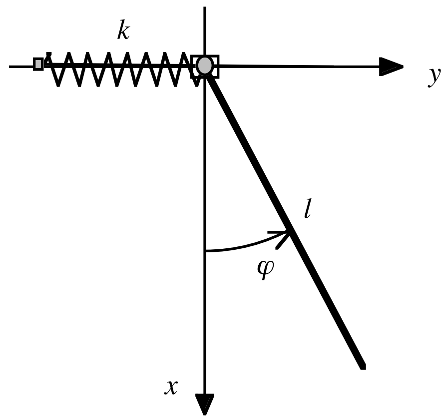
Vi använder nu $\dot{\boldsymbol{L}} = \frac{{}^A\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}$. Då Ω och θ antas konstanta är $\frac{{}^A\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L} = \mathbf{0}$. Alltså behövs $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}$. Vi har

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L} = \Omega(\sin\theta\,\boldsymbol{e}_y^A + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_z^A) \times \Omega\frac{1}{12}ma^2(5\sin\theta\,\boldsymbol{e}_y^A + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_z^A) = -\Omega^2\frac{ma^2}{12}4\sin\theta\cos\theta\,\boldsymbol{e}_x^A,$$

så vi får ekvationen $-\Omega^2\frac{ma^2}{12}4\sin\theta\cos\theta = mg\frac{a}{2}\sin\theta$ eller

$$\sin\theta\cos\theta = -\frac{3g}{2a\Omega^2}\sin\theta.$$

Denna har de triviala rötterna $\theta = 0, \pi$ för vilka $\sin\theta = 0$ och plattan står rakt upp respektive hänger rakt ned. Den enda andra lösningen ges av **Svar:** $\theta = \arccos(-\frac{3g}{2a\Omega^2})$.



Uppgift 3: En homogen stav av längd l och massa m hänger från en led som kan glida på ett glatt horisontellt spår. Leden är fäst i en fjäder med styvhet k. Den går längs spåret till en punkt där den andra änden är fixerad. Staven kan svänga i det vertikalplan som definieras av spåret. Tag fram Lagrangefunktionen. Antag små svängningar kring jämviktsläget och beräkna perioderna för normalmoderna.

Lösning 3: Koordinaterna för masscentrum är $x_G = \frac{l}{2}\cos\varphi, y_G = y + \frac{l}{2}\sin\varphi$. Här är y koordinaten för leden och origo är valt så att fjädern är ospänd vid $y = 0$. Masscentrums hastighet har då komponenterna $\dot{x}_G = -\frac{l}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi, \dot{y}_G = \dot{y} + \frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi$. Kinetiska energin ges av

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}J_G\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{y}^2 + l\dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2\right) + \frac{l^2}{12}\dot{\varphi}^2\right].$$

Potentiella energin ges av

$$V = mg\frac{l}{2}(1 - \cos\varphi) + \frac{1}{2}ky^2.$$

Approximation för små svängningar ger då Lagrangefunktionen

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{y}^2 + l\dot{y}\dot{\varphi} + \frac{l^2}{3}\dot{\varphi}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(y^2 + \frac{mgl}{2k}\varphi^2\right).$$

Sekular ekvationen blir då

$$\left| -\begin{pmatrix} m & m\frac{l}{2} \\ m\frac{l}{2} & m\frac{l^2}{3} \end{pmatrix}\omega^2 + \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{mgl}{2} \end{pmatrix} \right| = 0$$

Detta ger rötterna (**Svar:**)

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{ml}\left(3mg + 2kl \pm \sqrt{9m^2g^2 + 6kmgl + 4k^2l^2}\right)$$

Perioderna fås ur $T_{1,2} = 2\pi/\omega_{1,2}$.

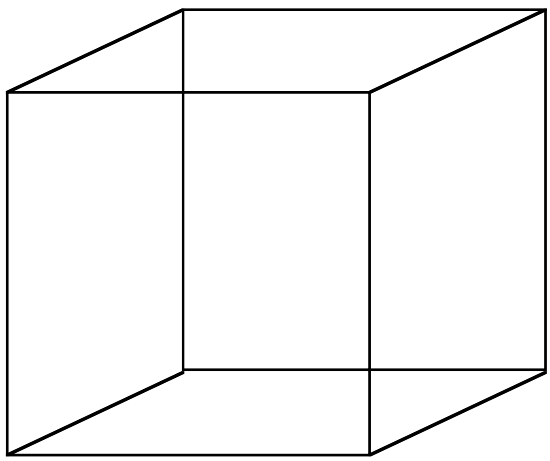
Idéproblem:

Uppgift 4: Härled Eulers dynamiska ekvationer för stela kroppens rotation.
Svar 4: Dessa är alltså komponenterna av ekvationen $\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{M}$ i ett kroppsfixt huvudaxel-system. Man får

$$\begin{aligned} J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 &= M_1, \\ J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 &= M_2, \\ J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 &= M_3. \end{aligned}$$

som slutresultat.

Uppgift 5: En person har tolv stycken likadana homogena tunna stavar som alla har massan m och längden ℓ. Dessa sätter personen ihop till en kropp så att stavarna bildar kanterna i en kub med sidan ℓ och massan $12m$. Beräkna tröghetstensorn för kroppen med avseende på mittpunkten (masscentrum).



Lösning 5: Enligt Steiners sats fås för z-axel genom mittpunkten vertikalt i figuren

$$J_z = 4m\left(\frac{\ell}{\sqrt{2}}\right)^2 + 8\left[m\frac{\ell^2}{12} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right]$$

där den första termen kommer från de fyra vertikala stängerna och den andra från de åtta horisontella. Detta ger

$$J_x = J_y = J_z = m\ell^2\frac{14}{3}.$$

Övriga element i tröghetstensorn äro noll.

Uppgift 6: Det lineariserade kopplade svängningsproblemet leder allmänt till ekvationerna

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0},$$

där $\mathbf{M}$ och $\mathbf{K}$ betecknar kvadratiska symmetriska positivt definita matriser och $\mathbf{u}$ och $\mathbf{0}$ betecknar kolumnmatriser med $u_1, u_2, \ldots, u_n$ respektive n nollor till element. Skissa hur man hittar allmänna lösningen till systemet.
Lösning 6: Slå upp i bok.