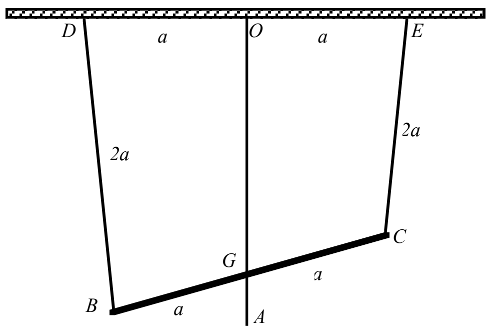
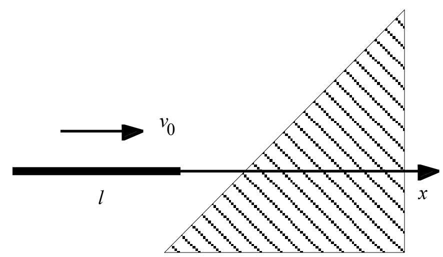
Kungl Tekniska Högskolan **2002 03 04**
Institutionen för Mekanik

Analytisk mekanik för MMT, 5C1121
Tentamen, 2002 03 04, kl 14.00-18.00

Räkneproblem

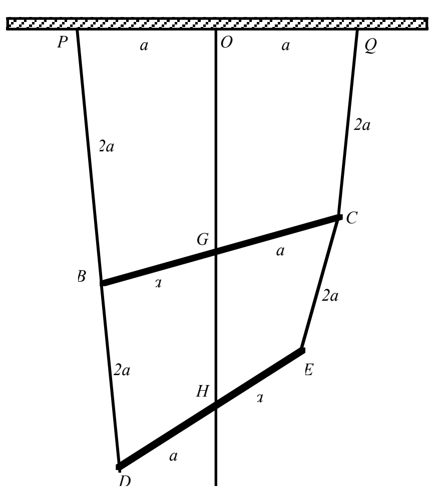
Uppgift 1: I mitten, G, av en smal homogen stav BC, av längd $2a$ och massa m, har borrats ett litet hål. Genom hålet löper en vertikal smal axel OA som staven kan rotera kring och glida längs, med försumbar friktion. Axelns ena ände O är fastsatt i ett tak och från detta tak löper också två lätta trådar, DB och EC, av längd $2a$, till stavens ändar. Dessa är monterade så att när staven hänger i sitt jämviktsläge är de vertikala. Ställ upp Lagrangefunktionen för systemet. Från jämviktsläget vrids staven 180° så att den är i kontakt med taket. Den släpps från vila i detta läge. Beräkna maximala vinkelhastigheten i den efterföljande rörelsen.





Uppgift 2: En smal homogen stav av längd l, och massa m rör sig i ett glatt horisontalplan med hastighet parallell med staven (x-axeln) och beloppet v_0. Den kolliderar inelastiskt med en fix glatt rak vägg i planet som bildar vinkeln 45° med staven. Efter islaget glider den alltså utan friktion längs väggen. Beräkna stavens hastighet och vinkelhastighet omedelbart efter kollisionen. Beräkna även storleken på stötimpulsen från väggen på staven.

Uppgift 3: I mitten av två smala homogena stavar BC och DE, båda av längd $2a$ och massa m, har borrats små hål. Genom hålen löper en vertikal smal axel OA som stavarna kan rotera kring och glida längs, med försumbar friktion. Axelns ena ände, O, är fastsatt i ett tak och från detta tak löper också två lätta trådar, PB och QC, av längd $2a$, till ena stavens ändar. Från dessa ändar går två likadana trådar, BD och CE, till den andra stavens ändar. När stavarna hänger i sitt jämviktsläge är de parallella och horisontella och alla trådarna vertikala. Ställ upp Lagrangefunktionen för systemet. Beräkna vinkelfrekvenserna för små svängningar för systemet kring jämviktsläget.



Idéproblem:

Uppgift 4: Den tunga symmetriska snurran har massan m, tröghetsmomentet J kring symmetriaxeln och tröghetsmomenten K för vinkelräta axlar genom kontaktpunkten med underlaget (den fixa punkten). Avståndet mellan denna punkt och tyngdpunkten är ℓ, och tyngdaccelerationen g. Antag att vinkeln θ mellan symmetriaxeln och vertikalen är konstant. Beräkna komponenterna av ekvationen $\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{M}$ i Resalsystemet.

Uppgift 5: Ett homogent klot av massan m och radien R vilar på ett horisontellt underlag. Välj ett koordinatsystem med origo i kontaktpunkten för klotet med underlaget och en vertikal z-axel. Beräkna tröghetstensorn för klotet i detta system. Alla ingående tröghetsmoment måste härledas.

Uppgift 6: Kinetiska energin för ett system med tidsoberoende holonoma tvång kan skrivas

$$T(q, \dot{q}) = \sum_{a=1}^{n} \sum_{b=1}^{n} \frac{1}{2} g_{ab}(q) \dot{q}_a \dot{q}_b.$$

Härled uttrycket för $g_{ab}(q)$ utgående från ett partikelsystem med N partiklar.

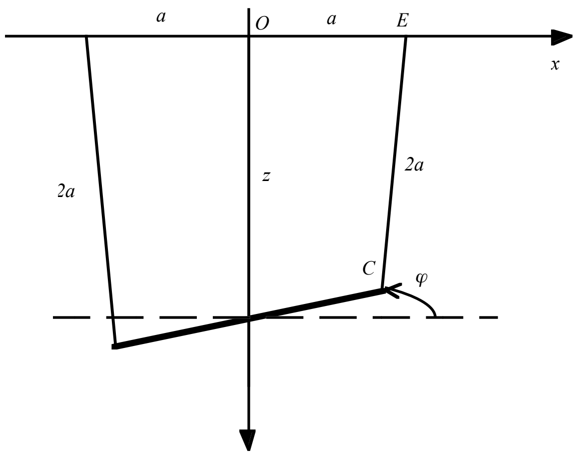
Varje uppgift ger högst 3 poäng. För godkänt fordras minst tre poäng på vardera räkne- och idéproblemen.

Tillåtna hjälpmedel: Mathematics Handbook (av Råde & Westergren och/eller av Spiegel) och Physics Handbook och/eller TEFYMA eller andra tabeller med tyngdpunkter och tröghetsmoment.

HE 02 03 04

Lösningar Räkneproblem

Uppgift 1: I mitten, G, av en smal homogen stav BC, av längd $2a$ och massa m, har borrats ett litet hål. Genom hålet löper en vertikal smal axel OA som staven kan rotera kring och glida längs, med försumbar friktion. Axelns ena ände O är fastsatt i ett tak och från detta tak löper också två lätta trådar, DB och EC, av längd $2a$, till stavens ändar. Dessa är monterade så att när staven hänger i sitt jämviktsläge är de vertikala. Ställ upp Lagrangefunktionen för systemet. Från jämviktsläget vrids staven 180° så att den är i kontakt med taket. Den släpps från vila i detta läge. Beräkna maximala vinkelhastigheten i den efterföljande rörelsen.



Lösning 1: Med cylinderkoordinater kan man skriva

$$\boldsymbol{r}_E = a\boldsymbol{e}_\rho(0), \qquad \boldsymbol{r}_C = a\boldsymbol{e}_\rho(\varphi) + z\,\boldsymbol{e}_z.$$

Eftersom avståndet mellan dessa punkter är trådens längd, $2a$, fås

$$(2a)^2 = |\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_E|^2 = (a^2 + z^2) + a^2 - 2a^2\boldsymbol{e}_\rho(\varphi)\cdot\boldsymbol{e}_\rho(0) = z^2 + 2a^2(1-\cos\varphi).$$

Den andra tråden ger samma resultat så vi har tvånget $z(\varphi) = a\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\varphi}$. Det finns alltså bara en frihetsgrad och vi väljer generaliserad koordinat φ. Kinetiska energin är

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}J_G\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}\frac{m(2a)^2}{12}\dot{\varphi}^2$$

och

$$\dot{z}^2 = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2\dot{\varphi}^2 = \frac{a^2}{2}\frac{\sin^2\varphi}{1+\cos\varphi}\dot{\varphi}^2 = \frac{a^2}{2}\frac{1-\cos^2\varphi}{1+\cos\varphi}\dot{\varphi}^2 = \frac{a^2}{2}(1-\cos\varphi)\dot{\varphi}^2$$

så vi får

$$T = \frac{1}{2}ma^2\left(\frac{1}{2}(1-\cos\varphi) + \frac{1}{3}\right)\dot{\varphi}^2$$

Potentiella energin är $V = -mgz = -mga\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\varphi}$ och detta ger Lagrangefunktionen (**Svar:**)

$$L(\varphi,\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}ma^2\left(\frac{1}{2}(1-\cos\varphi) + \frac{1}{3}\right)\dot{\varphi}^2 + mga\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\varphi}$$

Energin $E = T + V$ är bevarad och vinkelhastigheten måste vara störst i nedersta läget. Begynnelsevärdena $\varphi(0) = \pi, \dot{\varphi}(0) = 0$ ger $E = 0$. I nedersta läget ($\varphi = 0$) fås då

$$0 = \frac{1}{6}ma^2\dot{\varphi}^2 - 2mga$$

så, **Svar:** $\dot{\varphi}_{\max} = \sqrt{\frac{12g}{a}}$.

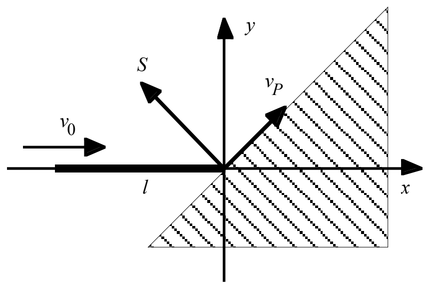
Uppgift 2: En smal homogen stav av längd l, och massa m rör sig i ett glatt horisontalplan med hastighet parallell med staven (x-axeln) och beloppet v_0. Den kolliderar inelastiskt med en fix glatt rak vägg i planet som bildar vinkeln 45° med staven. Efter islaget glider den alltså utan friktion längs väggen. Beräkna stavens hastighet och vinkelhastighet omedelbart efter kollisionen. Beräkna även storleken på stötimpulsen från väggen på staven.
Lösning 2: Vi använder impuls och impulsmoment, dvs. ekvationerna

$$\boldsymbol{p}_\mathrm{f} - \boldsymbol{p}_\mathrm{i} = \boldsymbol{S},$$

där $\boldsymbol{p}_\mathrm{f} = m\boldsymbol{v}_G$ och $\boldsymbol{p}_\mathrm{i} = mv_0\boldsymbol{e}_x$, och

$$\boldsymbol{L}_\mathrm{f} - \boldsymbol{L}_\mathrm{i} = \overline{GP} \times \boldsymbol{S},$$

där $\boldsymbol{L}_\mathrm{f} = J_G\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_z$ och $\boldsymbol{L}_\mathrm{i} = \boldsymbol{0}$. Här är G stavens mittpunkt och P den ände som är i kontakt med väggen. Geometrin ger att $\boldsymbol{S} = \frac{S}{\sqrt{2}}(-\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)$ så impulsekvationen ger de två



komponentekvationerna

$$m\dot{x} - mv_0 = -\frac{S}{\sqrt{2}}$$

$$m\dot{y} = \frac{S}{\sqrt{2}}$$

för tyngdpunktens hastighet ($\boldsymbol{v}_G = \dot{x}\,\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\,\boldsymbol{e}_y$) efter stöten. Då $\overline{GP} = \frac{l}{2}\boldsymbol{e}_x$ ger impulsmomentekvationen

$$m\frac{l^2}{12}\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_z = \frac{lS}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_z$$

Denna ekvation ger vinkelhastigheten genast efter stöten $\dot{\varphi} = \frac{6}{l\sqrt{2}}\frac{S}{m}$. Riktningen på $\boldsymbol{v}_P$ ges av $\boldsymbol{v}_P = \frac{v_P}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)$. Sambandsformeln, med $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_z$, ger att

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \overline{GP} = \boldsymbol{v}_G + \frac{l}{2}\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{v}_G + \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{S}{m}\boldsymbol{e}_y$$

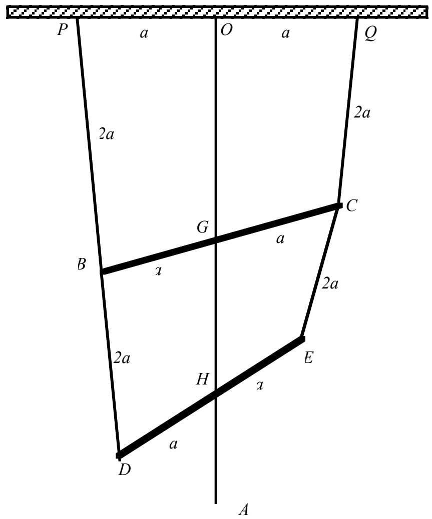
. Ur x- och y-komponenterna av detta fås då följande två ekvationer

$$\frac{v_P}{\sqrt{2}} = \left(v_0 - \frac{S}{m\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{v_P}{\sqrt{2}} = \frac{S}{m\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{S}{m} = 4\frac{S}{m\sqrt{2}}$$

Sätter vi dessa lika får vi :
Svar: $S = \frac{\sqrt{2}}{5}mv_0$, och således $\dot{x} = \frac{4}{5}v_0$, $\dot{y} = \frac{v_0}{5}$, och $\dot{\varphi} = \frac{6}{5}\frac{v_0}{l}$.

Uppgift 3: I mitten av två smala homogena stavar BC och DE, båda av längd $2a$ och massa m, har borrats små hål. Genom hålen löper en vertikal smal axel OA som stavarna kan rotera kring och glida längs, med försumbar friktion. Axelns ena ände, O, är fastsatt i ett tak och från detta tak löper också två lätta trådar, PB och QC, av längd $2a$, till ena stavens ändar. Från dessa ändar går två likadana trådar, BD och CE, till den andra stavens ändar. När stavarna hänger i sitt jämviktsläge är de parallella och horisontella och alla trådarna vertikala. Ställ upp Lagrangefunktionen för systemet. Beräkna vinkelfrekvenserna för små svängningar för systemet kring jämviktsläget.



Lösning 3: Med nedåtriktad z-axel längs OA fås, som i Uppgift 1, att

$$\boldsymbol{r}_Q = a\boldsymbol{e}_\rho(0), \qquad \boldsymbol{r}_C = a\boldsymbol{e}_\rho(\varphi_1) + z_1\,\boldsymbol{e}_z \qquad \boldsymbol{r}_E = a\boldsymbol{e}_\rho(\varphi_2) + z_2\,\boldsymbol{e}_z,$$

och genom att använda att trådarna har konstant längd får man $z_1(\varphi_1) = a\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\varphi_1}$ och $z_2(\varphi_1,\varphi_2) = z_1 + a\sqrt{2}\sqrt{1+\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$. Vi har

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2) + \frac{1}{2}\frac{1}{3}ma^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2)$$

Notera att

$$\dot{z}_1 = \frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}\varphi_1}\dot{\varphi}_1 = -\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\sin\varphi_1}{\sqrt{1+\cos\varphi_1}}\dot{\varphi}_1 = -\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{1-\cos^2\varphi_1}}{\sqrt{1+\cos\varphi_1}}\dot{\varphi}_1 = -\frac{a}{\sqrt{2}}(\sqrt{1-\cos\varphi_1})\dot{\varphi}_1,$$

och motsvarande för $\dot{z}_2$, så, när vi sätter $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ i T, för små svängningar, får vi att den kvadratiska approximationen blir

$$T = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ma^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2).$$

Potentiella energin, $V = -mgz_1 - mgz_2$, blir

$$V = -mga\sqrt{2}\left[2\sqrt{1+\cos\varphi_1} + \sqrt{1+\cos(\varphi_2-\varphi_1)}\right] \approx \text{konst.} + mga\left(\frac{\varphi_1^2}{2} + \frac{(\varphi_2-\varphi_1)^2}{4}\right)$$

så att, i den kvadratiska approximationen,

$$V = \frac{1}{2}mga\left(\frac{3}{2}\varphi_1^2 + \frac{1}{2}\varphi_2^2 - \frac{1}{2}\varphi_1\varphi_2 - \frac{1}{2}\varphi_2\varphi_1\right).$$

Vi måste alltså lösa sekularekvationen

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{3}ma^2\omega^2 + \frac{3}{2}mga & -\frac{1}{2}mga \\ -\frac{1}{2}mga & -\frac{1}{3}ma^2\omega^2 + \frac{1}{2}mga \end{vmatrix} = 0$$

Rötterna ger **Svaret:** $\omega_{1,2}^2 = 3\left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{g}{a}$.

Uppgift 4: Den tunga symmetriska snurran har massan m, tröghetsmomentet J kring symmetriaxeln och tröghetsmomenten K för vinkelräta axlar genom kontaktpunkten med underlaget (den fixa punkten). Avståndet mellan denna punkt och tyngdpunkten är ℓ, och tyngdaccelerationen g. Antag att vinkeln θ mellan symmetriaxeln och vertikalen är konstant. Beräkna komponenterna av ekvationen $\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{M}$ i Resalsystemet.
Lösning 4: Se lämplig teoritext.

Uppgift 5: Ett homogent klot av massan m och radien R vilar på ett horisontellt underlag. Välj ett koordinatsystem med origo i kontaktpunkten för klotet med underlaget och en vertikal z-axel. Beräkna tröghetstensorn för klotet i detta system. Alla ingående tröghetsmoment måste härledas.
Lösning 5: Med avseende på masscentrum gäller för klotet att

$$J'_x = J'_y = J_z = \int (x^2 + y^2)\mathrm{d}m = \frac{2}{3}\frac{m}{V}\int (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}V = \frac{2}{3}\frac{3m}{4\pi R^3}\int r^2 \mathrm{d}V,$$

eftersom $\mathrm{d}m = (m/V)\mathrm{d}V$. Men $\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$ så vi får

$$J'_x = J'_y = J_z = \frac{2}{3}\frac{3m}{4\pi R^3}\int_0^R r^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{m}{2\pi R^3} 4\pi \frac{R^5}{5} = \frac{2}{5} m R^2.$$

För våra parallella x- och y-axlar genom kontaktpunkten fås, med Steiners sats, att

$$J_x = J_y = mR^2 + J'_x = mR^2 + \frac{2}{5}mR^2 = \frac{7}{5}mR^2.$$

Alltså, **Svar:** $J_x = J_y = \frac{7}{5}mR^2$, $J_z = \frac{2}{5}mR^2$, tröghetsprodukterna är noll av symmetriskäl.

Uppgift 6: Kinetiska energin för ett system med tidsoberoende holonoma tvång kan skrivas

$$T(q, \dot{q}) = \sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{n} \frac{1}{2} g_{ab}(q)\dot{q}_a \dot{q}_b.$$

Härled uttrycket för $g_{ab}(q)$ utgående från ett partikelsystem med N partiklar.
Lösning 6: Se lämplig teoritext.

Hanno Essén (2002 03 04)