

Analytisk mekanik

Problemsamling

Rolf Paulsson och Hanno Essén

KTH Mekanik

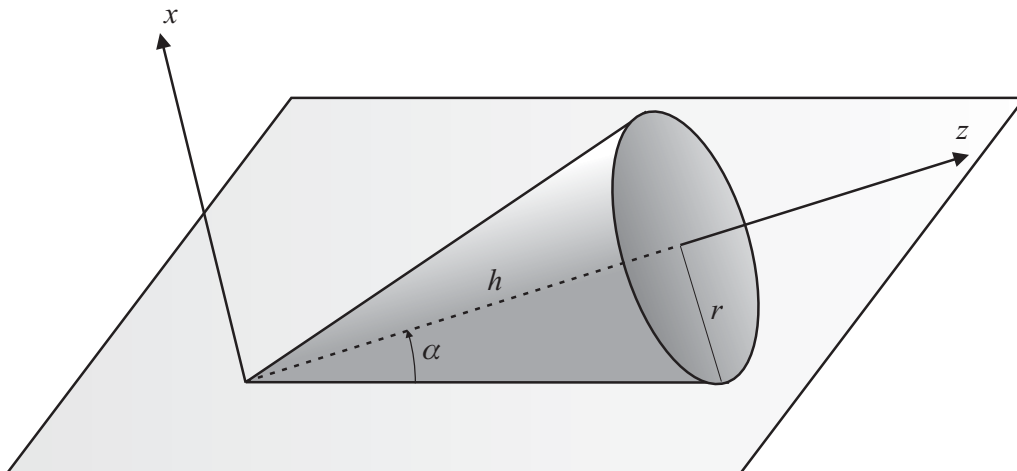
100 44 Stockholm

1987 och 2003

Abstract

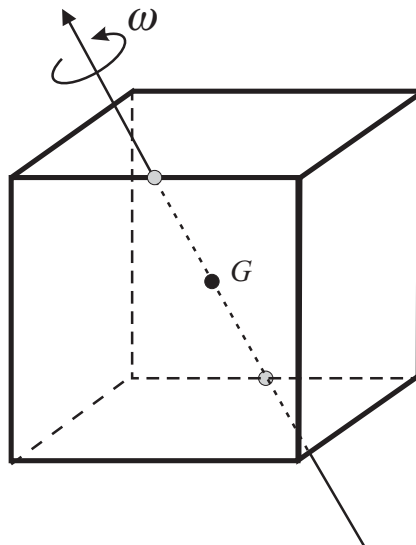
Denna problemsamling sammanställdes ursprungligen av Rolf Paulsson (Uppsala universitet) 1987 för användning i undervisningen på det som då hette Mekanik del 4 och som innehöll tredimensionell stelkroppssrörelse och analytisk mekanik, speciellt Lagranges metod. Numera kommer studenter vid KTH, i bästa fall, till denna nivå i årskurs tre efter två starkt bantade mekanikkurser om sammanlagt 10 poäng. Problemsamlingen innehåller därför delvis problem som är lite för svåra för den normale teknologen. Icke desto mindre är samlingen ett värdefullt pedagogiskt hjälpmedel. Jag har därför fräschat upp den med hjälp av $\text{\LaTeX}$ och CorelDraw. Viss redigering av lydelsernas text och beteckningar har också gjorts, men mest arbete har lagts ned på figurerna. Den ursprungliga ordningen har bibehållits. Ett antal småfel har rättats. Tack till Gösta Wingårdh för hjälp med ytterligare felreducering.

1 Problem rörande stela kroppens tredimensionella dynamik

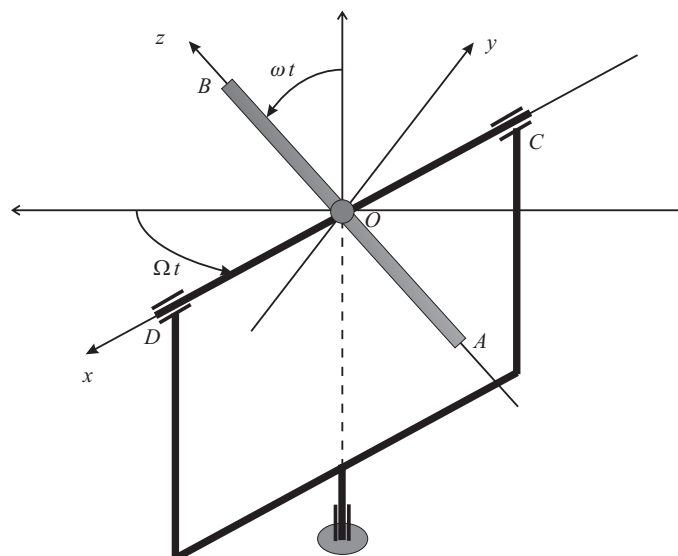


Problem 1 En rät cirkulär homogen kon med massan m , höjden h och toppvinkeln 2α rullar utan att glida på ett plan, varvid spetsen hålles fix. Vinkelhastigheten i ett visst ögonblick är ω . Beräkna rörelseenergin.

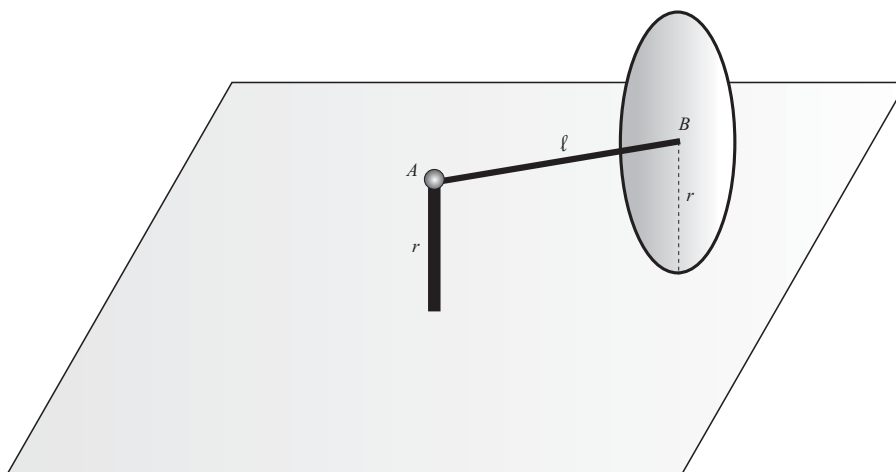
Använd tröghetsmomenten: $J_z = \frac{3}{10}mr^2$ och $J_x = \frac{3}{5}m\left(h^2 + \frac{r^2}{4}\right)$.



Problem 2 En homogen kub med massan m och kantlängden a roterar med vinkelhastigheten ω kring en axel genom masscentrum och mittpunkten på en av kanterna. Hur stor är rörelseenergin?

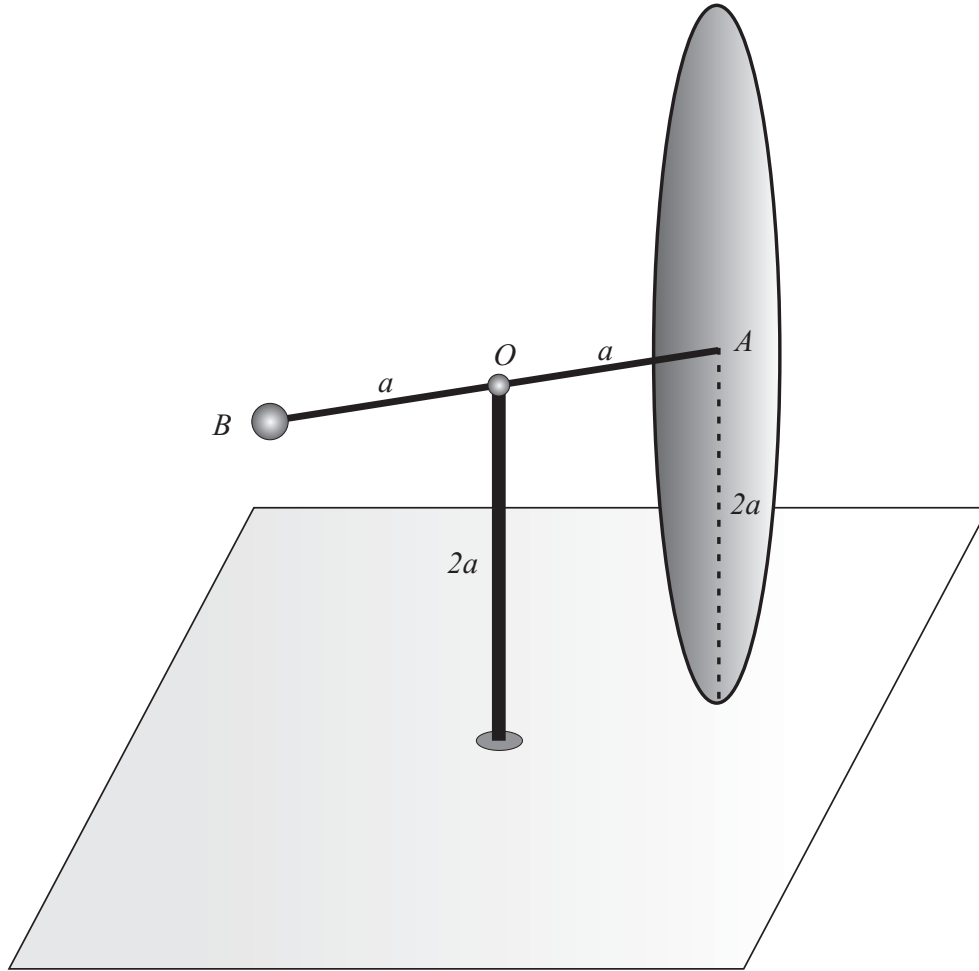


Problem 3 En smal homogen stång AB med massan m och längden ℓ roterar med den konstanta vinkelhastigheten ω kring en horisontell axel CD , som går genom stångens mittpunkt O och är vinkelrät mot stängen. Axeln CD roterar kring vertikalen genom O med den konstanta vinkelhastigheten Ω . Bestäm som funktion av tiden det kraftmoment med avseende på O som ger den ovan beskrivna rörelsen. Svaret får ges i komponentform med avseende på det kroppsfixa xyz -systemet.



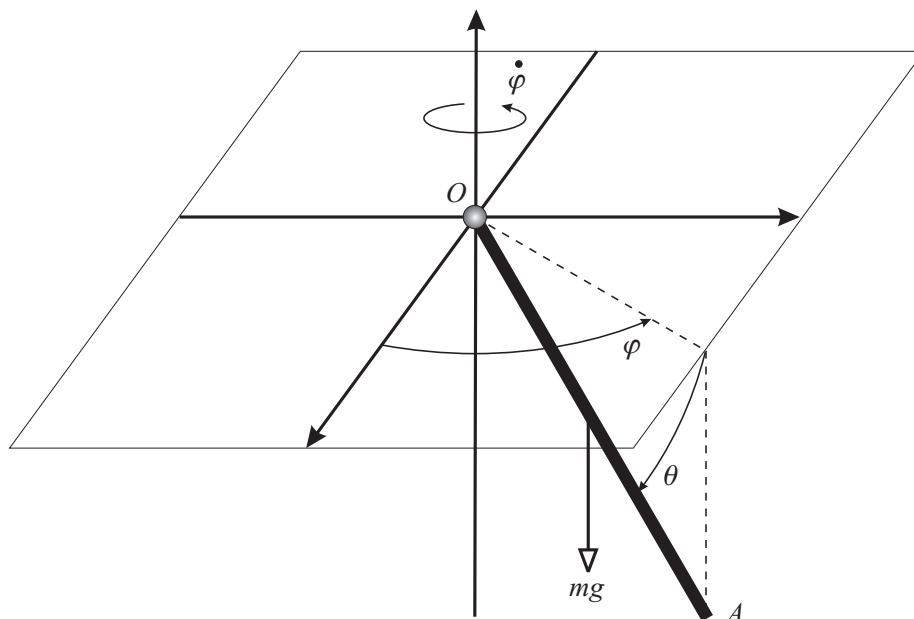
Problem 4 Ena ändpunkten B av en rak stång AB med längden ℓ är fäst i centrum av en homogen tunn cirkulär skiva med radien r så att stängen är vinkelrät mot skivan. Den andra ändpunkten A av stängen är med en led, som medger fri vridbarhet i alla riktningar fäst vid en fix punkt. Skivan rullar utan glidning på ett horisontellt plan beläget på avståndet r nedanför A . AB är alltså horisontell. Skivans massa är m och stångens massa kan försummas.

Bestäm skivans tryck mot horisontalplanet om AB roterar med konstant vinkelhastighet ω_0 kring vertikalen genom A .

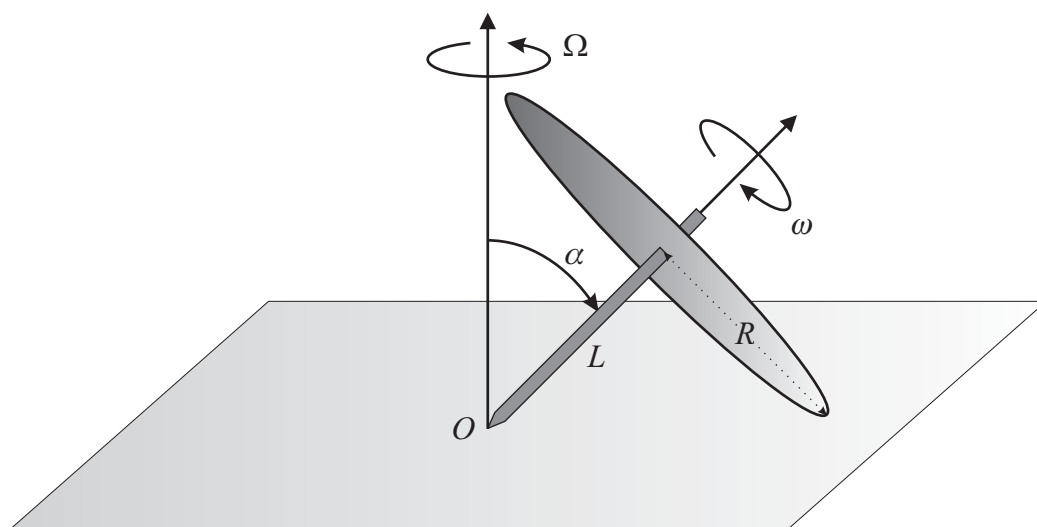


Problem 5 En stång AB med försumbar massa och med längden $2a$ är fritt vridbar kring den fixa mittpunkten O och ligger hela tiden horisontellt. I B finns en partikel med massan m och i A kan ett hjul i form av en homogen cirkulär skiva med radien a och massan m med försumbar friktion rotera kring AB , som är normal till hjulet i dess medelpunkt. Hjulet stöder mot ett plant strävt horisontellt underlag. Systemet sätts i rörelse så att hjulet tilldelas en rotationshastighet $4\omega_0$ i riktningen $\overrightarrow{BA}$, samtidigt som axeln ges en rotation ω_0 vertikalt nedåt. I början glider hjulet men så småningom inträder ren rullning. Hjulet förutsättes hela tiden vara i kontakt med underlaget och friktionen förutsättes verka i hjulets tangentialriktning.

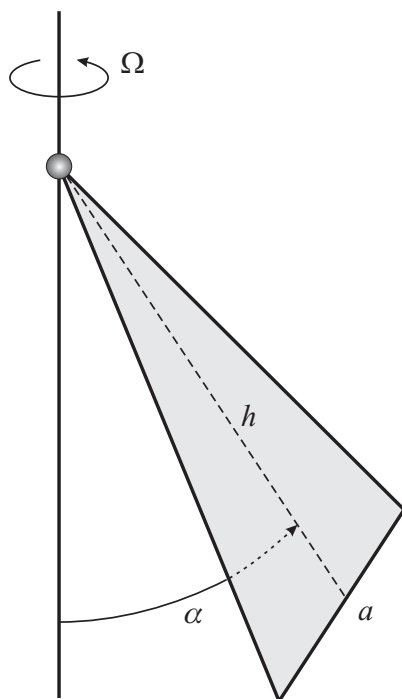
Beräkna hjulets och axelns rotationshastigheter när ren rullning inträtt. Beräkna även hjulets tryck mot underlaget i detta fall.



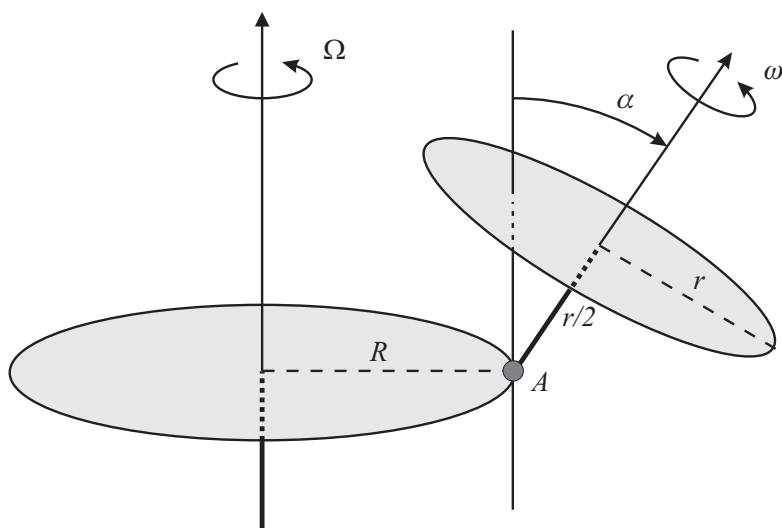
Problem 6 En rak homogen stång OA (längd 2ℓ , massa m) är fritt vridbar kring sin ena ändpunkt O , som är fix. I första ögonblicket är stången horisontell ($\theta = 0$) och roterar kring vertikalen genom O med vinkelhastighet $\dot{\varphi} = \omega$. Under inverkan tyngdkraften börjar den vrida sig kring en horisontell axel genom O . Beräkna $\dot{\varphi}$ som en funktion av θ för den följande rörelsen samt beräkna vändlägena för θ -rörelsen.



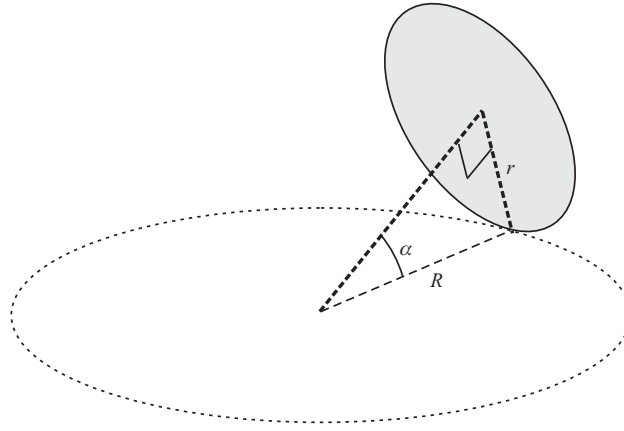
Problem 7 En snurra består av en skiva med radien R och en rak lätt stång som utgör snurrans axel. Denna axel går genom en fix punkt O . Avståndet mellan O och skivan är L . Axeln bildar med vertikalen i O en fix vinkel α . Planet genom snurrans axel och vertikalen i O roterar med en konstant vinkelhastighet Ω kring vertikalen i O . Bestäm snurrans vinkelhastighet ω relativt detta plan.



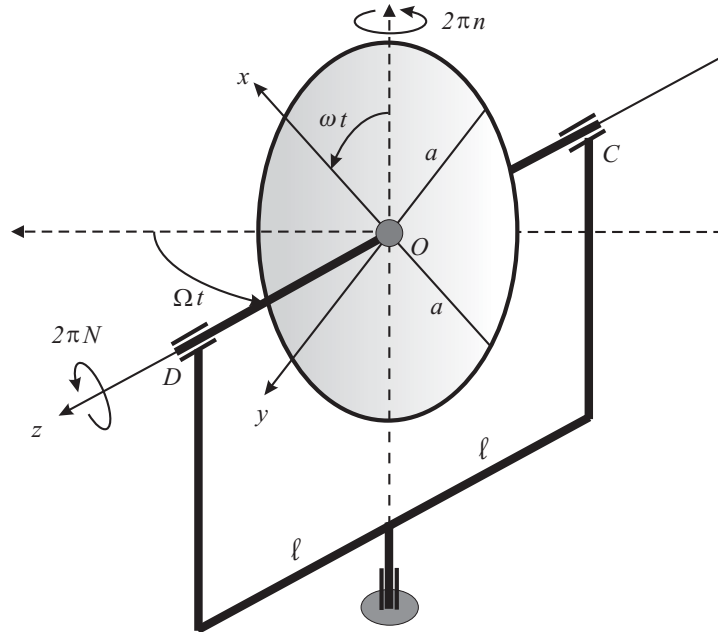
Problem 8 En homogen likbent triangulär skiva med basen a och höjden h roterar med konstant vinkelhastighet Ω kring en vertikal axel genom triangelns spets. Triangelns bas är hela tiden horisontell och rotationen sker kring en glatt kulle i triangelns spets. Beräkna den vinkel α som triangelns höjd bildar med vertikalen.



Problem 9 En snurra består av en homogen, cirkulär skiva med radien r och en lätt axel med längden $r/2$ vinkelrätt mot skivan genom dess medelpunkt. Axelns ändpunkt är lagrad i en punkt A på periferin till en horisontell cirkulär karusell med radien R , så att snurrans axel kan röra sig utan friktion i ett vertikalplan, som innehåller karusellens axel. Karusellen har den konstanta vinkelhastigheten Ω kring sin axel, och snurran har den konstanta vinkelhastigheten ω relativt karusellen kring sin axel. Sök vinkeln α mellan snurrans axel och vertikalen.



Problem 10 Ett mynt rullar utan rullningsmotstånd på ett horisontellt bord längs en cirkel med radien R . Myntet betraktas som en tunn homogen skiva med radien r och massan m . Myntets plan bildar vinkeln $\alpha = \arcsin(r/R)$ med vertikalplanet genom skärningslinjen mellan myntets plan och horisontalplanet. Hur lång tid behöver myntet för att rulla ett varv runt cirkeln på bordet?

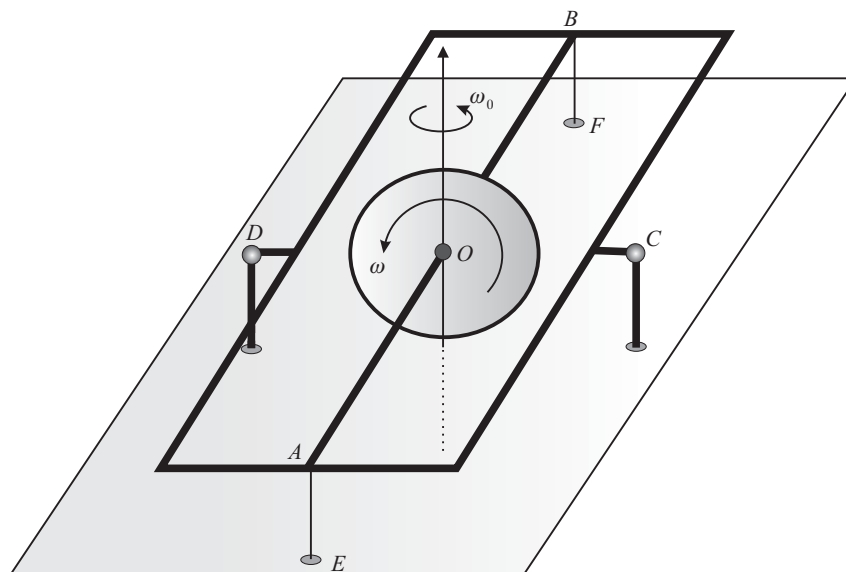


Problem 11 En homogen jämntjock cirkelrund skiva med massan M och radien a roterar runt den horisontella axeln CD med den konstanta vinkelhastigheten $\omega = 2\pi N$. Axeln CD i sin tur vrides enligt figuren runt en vertikal axel mitt under skivan med den konstanta vinkelhastigheten $\Omega = 2\pi n$. Skivan sitter mitt på axeln CD , som har längden 2ℓ . Axelns tyngd kan försummas.

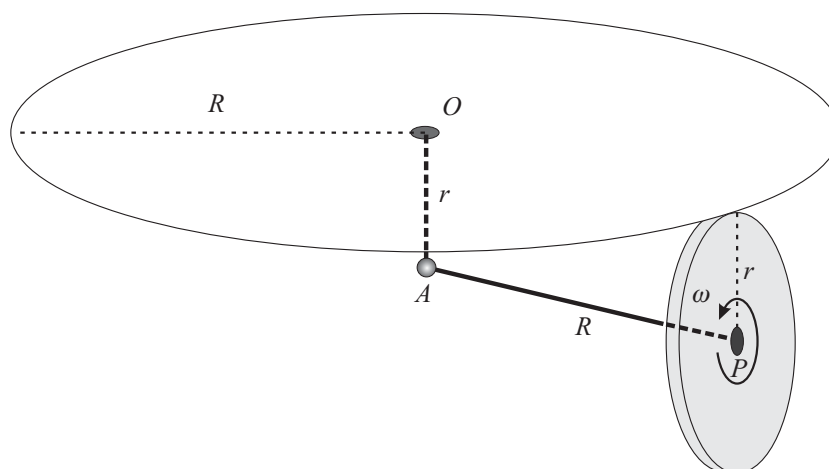
a) Sök påfrestningen på lagren C och D .

b) Sök n så att trycket i ena lagret blir noll.

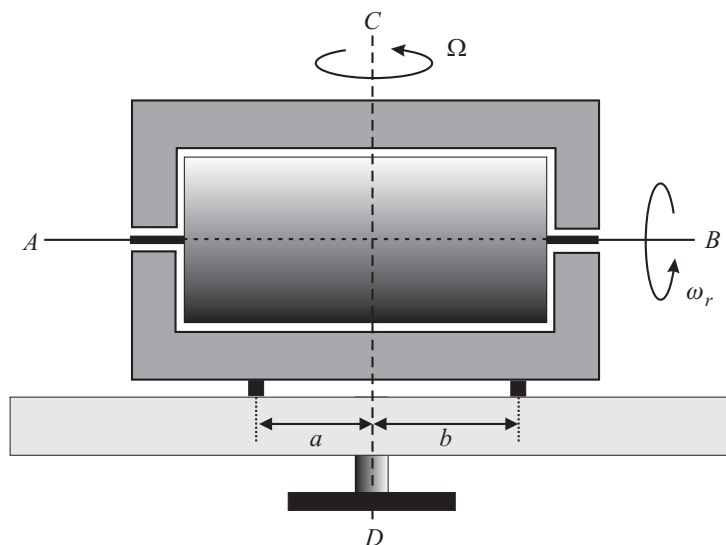
Siffrvärden: $\ell = a = 0.5$ meter, $N = 1800$ varv per minut, tyngdaccelerationen $g \approx \pi^2 \text{ m/s}^2$.



Problem 12 Axeln AB till en rotationssymmetrisk snurra är lagrad i en rektangulär ram, vridbar kring axeln CD . CD är $\perp AB$ och passerar snurrans tyngdpunkt O . Avstånden är $OA = BO = L$. Apparaten är enligt figuren monterad på en platta. Ramens rotation kring CD hindras av trådar AE och BF som är $\perp AB$ och CD . Dessa trådar är från början sträckta men spänningslösa. Snurrans tröghetsmoment kring AB är J och dess vinkelhastighet relativt ramen är ω , moturs sett från A . Om hela apparaten vrides kring en axel $\perp AB$ och CD med vinkelhastigheten ω_0 , moturs sett från O dvs ovanifrån så uppträder en spänning i trådarna AE och BF . Vilken tråd blir spänd och hur stor blir spänningen?

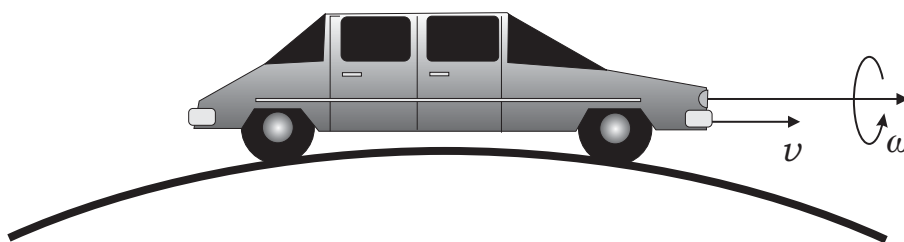


Problem 13 En vertikal stång OA med längden r är fäst i ett horisontellt tak. I den nedre punkten A är en lätt stång AP med längden R monterad i en glatt universalled. En cirkulär homogen skiva är monterad med medelpunkten i P , vinkelrät mot AP . Skivan, vars massa är m och radie r , rullar i taket utan att glida. Kontaktpunkten beskriver en cirkel med radie R . Tyngdaccelerationen är g . Skivans vinkelhastighet relativt planet OAP är ω . Sök skivans tryck mot taket och det minsta ω som krävs för bibehållen takkontakt.



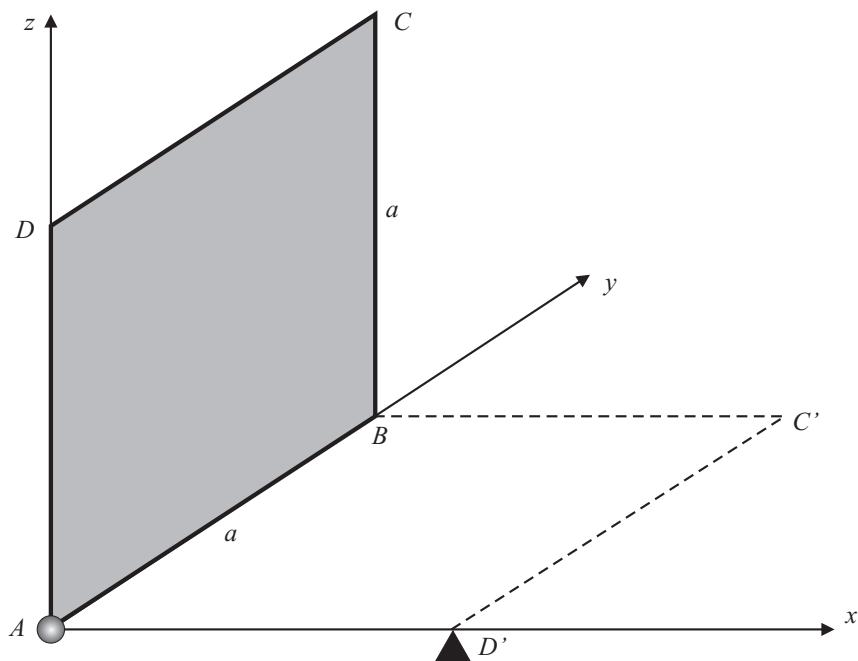
Problem 14 En elektrisk motor med tyngden mg vilar på två smala lister, vilka är fastsatta på en horisontell skiva, som vrider sig med konstant vinkelhastighet Ω moturs sett uppifrån kring en vertikal axel CD , vilken skär rotationsaxelns medellinje AB . Listerna är vinkelräta mot AB och befinner sig på avstånden a och b från CD enligt figuren. Rotorn vrider sig relativt statorn med den konstanta vinkelhastigheten ω_r moturs sett från B . Statorn är symmetrisk med avseende på vertikalplanet genom AB och det mot AB vinkelräta planet genom CD . Rotorns tyngdpunkt ligger i skärningspunkten mellan AB och CD och tröghetsellipsoiden i tyngdpunkten är rotationssymmetrisk kring AB . Rotorns tröghetsmoment med avseende på AB är J .

Hur stor får Ω högst vara för att motorn skall stå stilla på listerna?

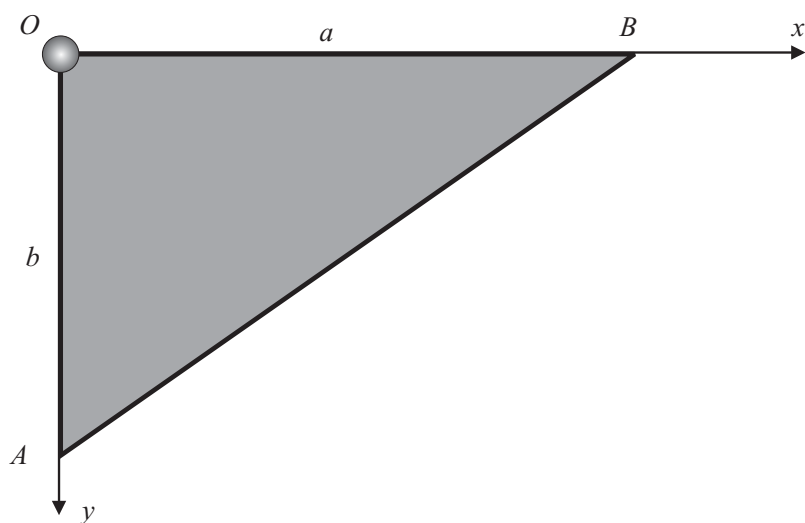


Problem 15 En sportbil med gasturbinmotor passerar på rak väg ett backkrön med hastigheten v . Backkrönet har krökningsradie ρ . Gasturbinens axel är orienterad i bilens längdriktning, rotorn har tröghetsmomentet J kring turbinaxeln och vinkelhastigheten ω relativt bilen, så att rotationsvektorn ω pekar framåt. Föraren märker härvid att bilen visar en tendens att svänga åt ena sidan.

- Åt vilken sida och hur stort vridande moment behövs för att hålla bilen på vägen?
- Hur stor blir speciellt momentet i SI-systemet om $v = 30 \text{ m/s}$, $\rho = 100 \text{ m}$, $J = 1 \text{ kg m}^2$ och $\omega = 2000 \text{ radianer per sekund}$?

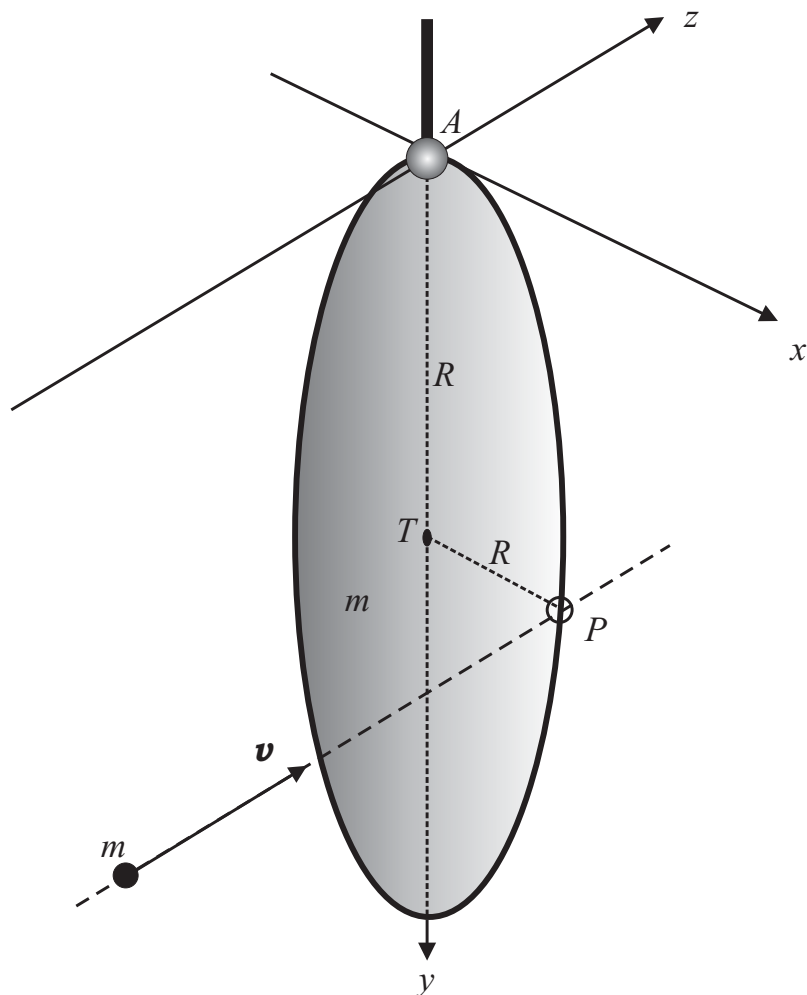


Problem 16 En kvadratisk homogen lucka $ABCD$ med kantlängden a kan friktionsfritt rotera kring den horisontella kanten AB . Luckan står först vertikalt men rubbas obetydligt och faller. Då AD är horisontell slår hörnet D mot en fix punkt D' och fastnar. Det antages att hörnet B samtidigt lossnar (utan stötkrafter), samt att luckan börjar rotera kring AD' med en vinkelhastighet ω_x . Sök ω_x .



Problem 17 En jämntjock, homogen, tunn skiva i form av en rätvinklig triangel AOB med massa m är fritt rörlig kring en fix kulle i den räta vinkeln spets O . Kateternas längder är $OB = a$ och $OA = b$. Från början fasthålls punkten A , och skivan roterar med vinkelhastigheten ω kring OA . Plötsligt släpps bindningen vid A , och punkten B fixeras i stället.

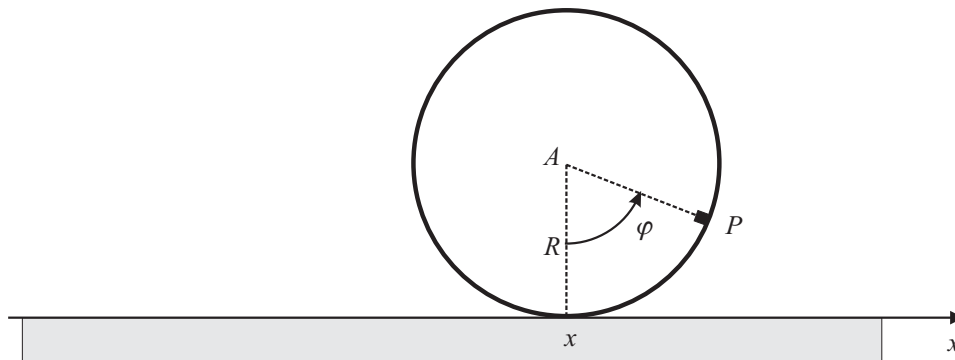
- Hur stor blir den nya vinkelhastigheten ω' kring OB omedelbart efter fixerandet av B ?
- Hur stor blir den i B uppträdande stötpulsens S_z ?



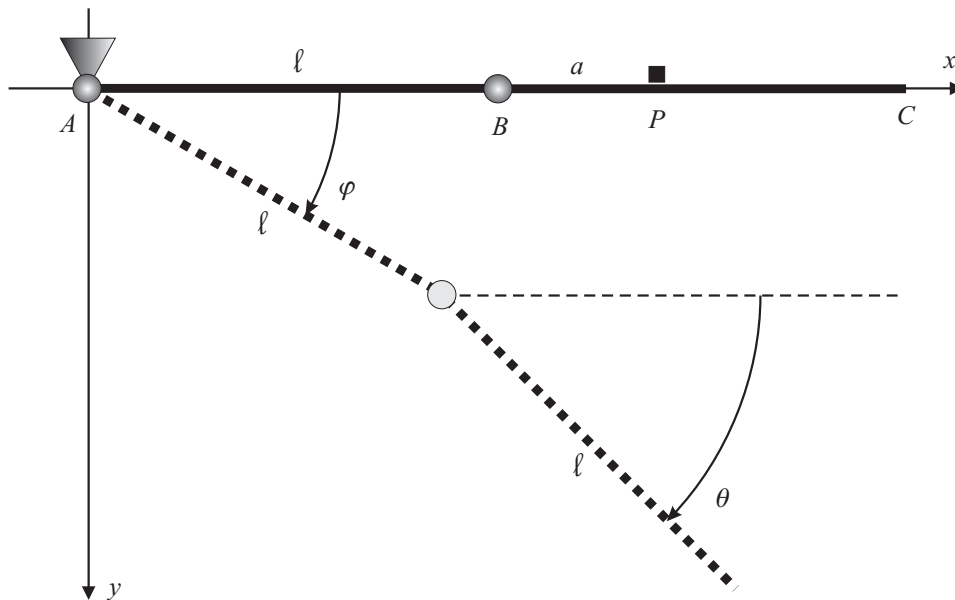
Problem 18 En tunn homogen cirkulär skiva med radien R och massan m hänger i vila i en fix punkt A på periferin. Skivan kan friktionsfritt rotera i alla riktningar kring A , som alltså är en glatt kulle. En partikel med massan m och hastigheten v riktad vinkelrätt mot skivan träffar denna i en punkt P på periferin och fastnar där. Punkten P ligger längst till höger, sett från partikeln, på samma höjd som skivans medelpunkt T . Vinkeln ATP är således en rät vinkel.

- Bestäm till storlek och riktning vinkelhastigheten omedelbart efter stöten.
- Bestäm även stötimpulsen i A .

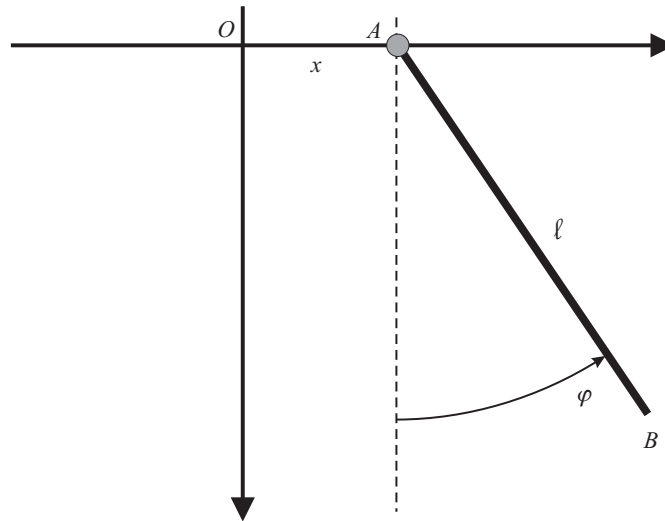
2 Problem med tillämpningar på Lagranges ekvationer



Problem 19 Ett rör i form av ett rakt, cirkulärt, cylindriskt skal med massa M och radie R kan rulla utan glidning på ett horisontalplan. Inuti skalet glider en partikel P med massa m , med försumbar friktion. Låt φ vara vinkeln mellan vertikalen och AP , linjen från cylinderaxeln till partikeln. Systemet börjar sin rörelse utan begynnelsehastighet och med partikeln vid $\varphi = \pi/2$. Beräkna cylinderaxelns läge x , med $x = 0$ vid startläget, som funktion av φ .



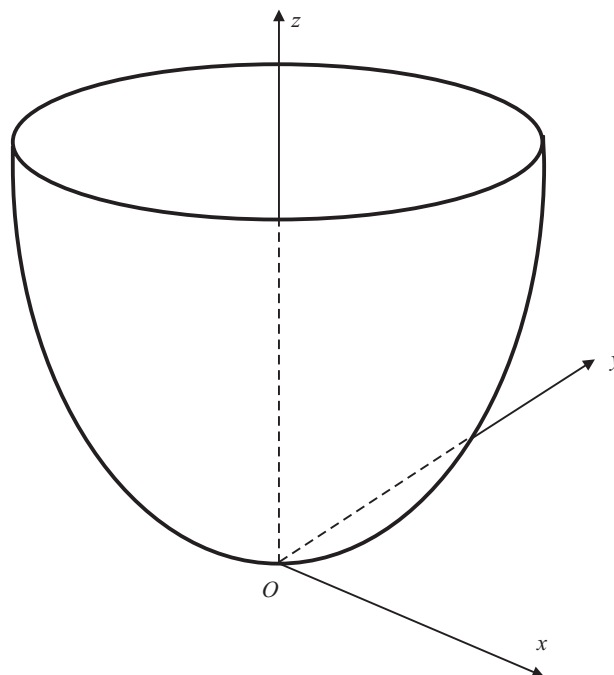
Problem 20 Två lika, homogena, jämntjocka stänger AB och BC , båda av längden ℓ , är förenade med en glatt led vid B . Ändpunkten A kan vrida sig kring är fix glatt led. Stängerna fasthålls först i rät linje i horisontalplanet genom A . En mycket liten partikel med försumbar massa placeras i en punkt P på stängens BC :s översida, varefter systemet släpps och börjar röra sig (falla), utan begynnelsehastighet. På vilket avstånd a från B kan partikeln vara placerad, för att dess kontakt med stängens ej skall upphöra omedelbart efter att rörelsen börjat?



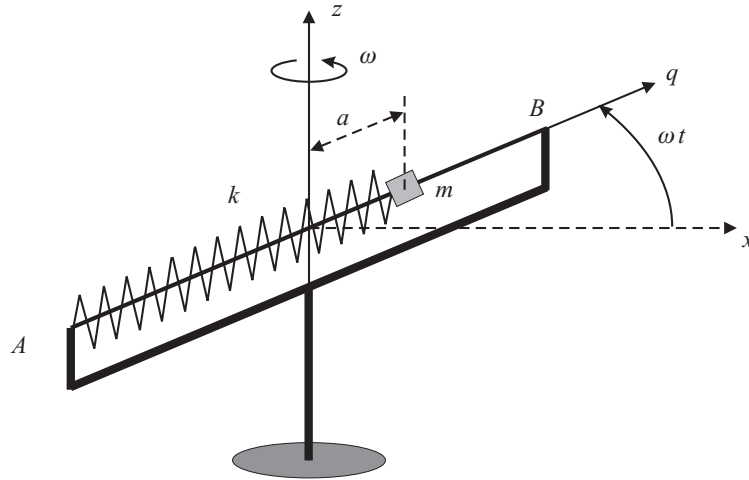
Problem 21 Ändpunkten A på en pendel i form av en stång AB kan friktionsfritt röra sig längs en rät horisontell linje (x -axeln). Stången är rak och homogen. Den har längden ℓ och massan m . Den rör sig i ett vertikalt plan där den kan rotera fritt kring A . Ändpunkten A påverkas av en periodisk kraft $F_x = \frac{mg}{3} \cos(\omega t)$, där $\omega^2 = g/\ell$, längs den horisontella x -axeln.

a) Uppställ pendelns rörelseekvationer.

b) Bestäm rörelsen under förutsättning att stångens lutningsvinkel φ och vinkelhastighet $\dot{\varphi}$ alltid är små. Använd begynnelsevärdena (vid $t = 0$): $x(0) = \dot{x}(0) = \varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$, där x är A :s läge.



Problem 22 En skål har formen av en elliptisk paraboloid vars ekvation kan skrivas $7(x^2 + y^2) - 2xy = 24cz$. Den ställs med z -axeln lodrätt uppåtriktad, så att en partikel kan befinna sig i jämvikt i origo O . Skålens insida är glatt. Beräkna vinkelfrekvenserna ω_1 och ω_2 för de båda egensvängningarna, som partikeln kan utföra i närheten av jämviktsläget O .



Problem 23 En vikt med massan m kan glida friktionsfritt längs ett rakt horisontellt spår AB . Mellan massan och änden A av spåret går en spiral fjäder, av försumbar massa, med fjäderkonstant k . Som figuren visar är massans jämviktsläge a bortom spårets mittpunkt från A sett.

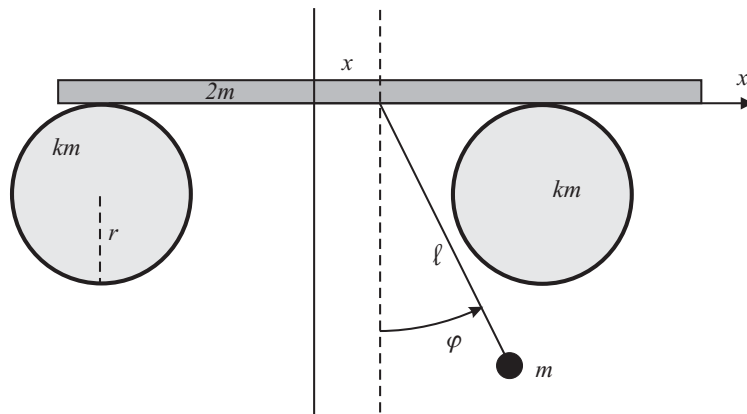
Spåret är monterat så att det kan roteras kring en vertikal axel genom spårets mittpunkt.

a) Beräkna vinkelfrekvensen Ω för massans svängning kring jämviktsläget när spåret ej roterar.

Antag att spåret roterar med den konstanta vinkelhastigheten ω . Beräkna:

b) massans nya jämviktsläge uttryckt i Ω .

c) nya frekvensen ν för små svängningar uttryckt i Ω .



Problem 24 En horisontell, rektangulär platta ligger på två likadana cirkulära cylindrar, vilka är friktionsfritt vridbara kring sina fixa axlar. Plattan kan rulla på cylindrarna utan glidning och utan rullfriktion, varvid dessas axlar ständigt är parallella med en kantlinje i plattan. Cylindrarna, som är homogena med radie r , har vardera massan km . Plattans massa är $2m$. I plattans mittpunkt är en matematisk pendel med massan m och längden ℓ upphängd. Uppställ de Lagrangeska rörelseekvationerna för systemets rörelse och integrera dem för små svängningar hos pendeln. I begynnelseögonblicket är systemet i vila, plattans mittpunkt mitt emellan cylindrarna ($x = 0$) och pendeln bildar vinkeln $\varphi(0) = \alpha$ med vertikalen.

3 Svar och anvisningar

Svar 1

Notera att vinkelhastighetsvektorn är parallell med konens kontaktlinje med planet. Kinetiska energin (eller rörelseenergin) är

$$T = \frac{3m\omega^2}{40} \frac{6h^2 + r^2}{h^2 + r^2} r^2.$$

Svar 2

Notera att kinetiska energin är den samma för alla riktningar på rotationsaxlen genom masscentrum; kuben är en sfärisk snurra. Kinetiska energin är

$$T = \frac{1}{12} m a^2 \omega^2.$$

Svar 3

Kraftmomentets komponenter blir

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{m\ell^2}{12} \Omega^2 \sin \omega t \cos \omega t, \\ M_y &= \frac{m\ell^2}{6} \omega \Omega \cos \omega t, \\ M_z &= 0. \end{aligned}$$

Svar 4

Tryckkraften blir

$$F = mg + \frac{mr\omega_0^2}{2}.$$

Svar 5

Hjulets vinkelhastighet blir ω_0 .

Axeln BA får vinkelhastigheten $2\omega_0$ vertikalt nedåt.

Tryckkraften mot underlaget blir $F = 4ma\omega_0^2$.

Svar 6

Använd att rörelsemängdsmomentets vertikala komponent är bevarad. Man får med hjälp av detta att:

$$\dot{\varphi}(\theta) = \frac{\omega}{\cos^2 \theta}.$$

Använder man energins bevarande och att vändlägena i θ -rörelsen inträffar när $\dot{\theta} = 0$ får man att vändlägena ges av $\theta_{\min} = 0$ och

$$\theta_{\max} = \arcsin \left(\frac{\ell\omega^2}{3g} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{3g}{\ell\omega^2} \right)^2} - 1 \right] \right).$$

Svar 7

Detta är ett exempel på den tunga precesserande symmetriska snurran. Resultatet bör bli

$$\omega = \frac{2Lg}{R^2\Omega} + \left[2 \left(\frac{L}{R} \right)^2 - \frac{1}{2} \right] \Omega \cos \alpha.$$

Notera att om $\omega \gg 1$ så måste $\Omega \ll 1$ och den andra termen i uttrycket kan då försummas jämfört med den första.

Svar 8

Du behöver tröghetsmomenten för en triangel. Man får att vinkeln kan vara antingen $\alpha = 0$ eller

$$\alpha = \arccos\left(\frac{4g}{3h\Omega^2}\right).$$

Svar 9

Vinkeln blir

$$\alpha = \arctan\left(\frac{R\Omega^2}{r\omega\Omega - g}\right).$$

Svar 10

Perioden är

$$T = \pi \sqrt{\frac{r}{g} \frac{4 \cot^2 \alpha \cos \alpha \sin \alpha + 2 \cot \alpha - \cos \alpha \sin \alpha}{\sin \alpha}}.$$

Svar 11

a) Krafterna på lagren blir

$$N_{C,D} = \frac{M}{2} \left(g \pm \frac{2\pi^2 n N a^2}{\ell} \right).$$

b) På ena lagret blir då kraften noll när

$$n = \frac{g\ell}{2\pi^2 N a^2}.$$

Med siffrvärdena fås då att kraften blir noll när $n = 2$ varv/minut.

Svar 12

Tråden AE blir spänd och spänningen ges av

$$S_{AE} = \frac{J\omega\omega_0}{L}.$$

Svar 13

Tryckkraften mot skivan blir,

$$N = \frac{mr^3\omega^2}{2R^2} - mg,$$

och vinkelhastigheten måste uppfylla

$$\omega^2 \geq \frac{2gR^2}{r^3}.$$

Svar 14

Största tillåtna vinkelhastighet blir

$$\Omega_{\max} = \frac{mga}{J\omega}.$$

Svar 15

a) Bilen tenderar att svänga åt vänster och momentet är

$$M = \frac{Jv\omega}{\rho}.$$

b) Med givna data fås momentet $M = 600 \text{ Nm}$.

Svar 16

Vinkelhastigheten blir

$$\omega_x = -\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3g}{a}}.$$

Svar 17

a) Vinkelhastigheten blir

$$\omega' = -\frac{a}{2b}\omega.$$

b) Stötimpulsen blir

$$S_z = \frac{ma\omega}{8}.$$

Svar 18

Vinkelhastighetsvektorn omedelbart efter stöten är

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{v}{29R}(4\mathbf{e}_x - 20\mathbf{e}_y).$$

Tvångsstötimpulsen i A ges av

$$\mathbf{S} = -\frac{mv}{29}\mathbf{e}_z.$$

Svar 19

Man får att sambandet blir

$$x = \frac{mR}{2M+m}(1 - \sin \varphi),$$

mellan cylinderns läge och partikelns vinkel.

Svar 20

Partikeln behåller kontakten med stängen om accelerationen nedåt är mindre än g , där den ligger. Notera att man endast behöver accelerationerna i första ögonblicket, dvs när $\varphi = \theta = \dot{\varphi} = \dot{\theta} = 0$. Man får att

$$a \geq 2\ell/3$$

måste gälla om kontakten skall bibehållas.

Svar 21

a) Rörelseekvationerna blir med Lagranges metod

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \frac{1}{2}\ell\ddot{\varphi}\cos\varphi - \frac{1}{2}\ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi &= \frac{1}{3}g\cos\omega t, \\ \ddot{x}\cos\varphi + \frac{2}{3}\ell\ddot{\varphi} &= -g\sin\varphi.\end{aligned}$$

b) Man får, efter linearisering och lösning resultatet:

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{2}{5}\left[\cos\left(\sqrt{6g/\ell}t\right) - \cos\left(\sqrt{g/\ell}t\right)\right], \\ x &= \frac{\ell}{3} - \frac{\ell}{5}\left[\cos\left(\sqrt{6g/\ell}t\right) + \frac{2}{3}\cos\left(\sqrt{g/\ell}t\right)\right].\end{aligned}$$

Svar 22

Notera att bidraget till kinetiska energin från $\dot{z}$ kan försummas nära jämviktsläget. Med teorin för kopplade svängningar fås

$$\omega_1^2 = \frac{g}{2c}, \quad \omega_2^2 = \frac{2g}{3c}.$$

Svar 23

a) Vinkelfrekvensen då spåret ej roterar ges av

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

b) Vid rotation blir det nya jämviktsläget

$$q_0 = a \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2}.$$

c) För den nya vinkelfrekvensen Ω' fås $\Omega'^2 = \Omega^2 - \omega^2$. Frekvensen är då $\nu = \Omega'/2\pi$. Alltså är frekvensen för små svängningar kring nya jämviktsläget

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\Omega^2 - \omega^2}.$$

Svar 24

Pendelns utslagsvinkel ges av

$$\varphi = \alpha \cos \omega t$$

och plattans mittpunkt uppfyller

$$x = \frac{\alpha \ell}{3+k} (1 - \cos \omega t)$$

där

$$\omega^2 = \frac{3+k}{2+k} \frac{g}{\ell}.$$