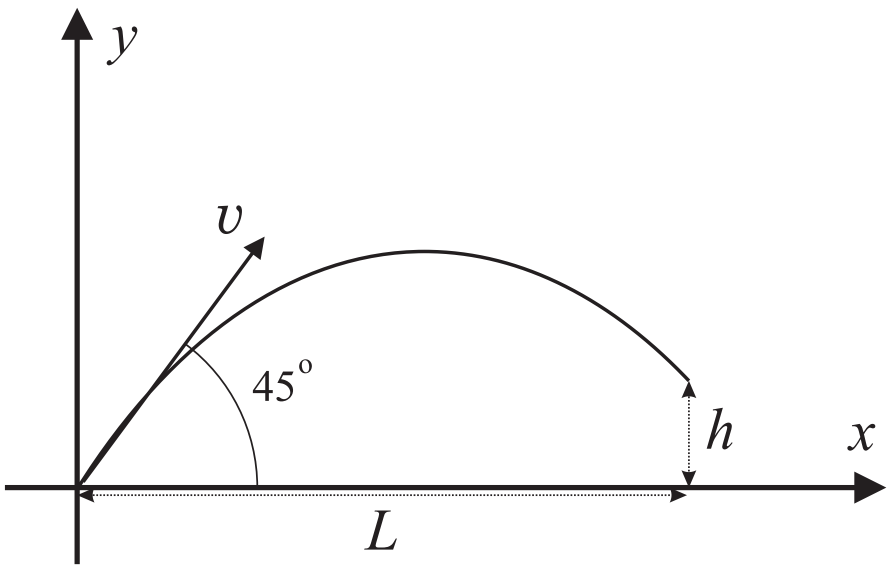
Mekanik mk, SG1102, Lösningar till problemtentamen, 2013 05 23

Uppgift 1: Längre slag i golf påverkas kraftigt av luften. För kortare ”chippar” är däremot luftmotståndet försumbart. En golfspelare vill slå bollen från en bunker ner i hålet på en green som ligger på det horisontella avstådet L från bollen och på höjden h ovanför bollen. Klubban är vinklad så att utgångshastigheten bildar vinkeln $45°$ med horisontalen. Vilken fart måste bollen ha?



Figur 1: Låt beloppet av begynnelsehastigheten vara v. Eftersom vinkeln mot horisontalen är $45°$ blir både $x-$ och y-komponenterna av begynnelsehastigheten $v/\sqrt{2}$.

Lösning 1: För begynnelsehastigheterna gäller $v_x = v/\sqrt{2}$ och $v_y = v/\sqrt{2}$. Hastigheten i x-led är konstant och i y-led gäller konstant acceleration i den negativa riktningen. Väljer vi koordinatsystem så att begynnelseläget är $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ fås då direkt för bankurvan,

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}vt,$$

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}vt - \frac{1}{2}gt^2.$$

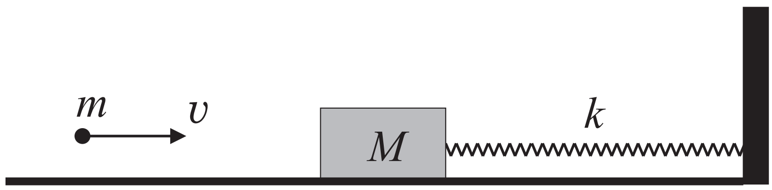
Låt tiden när bollen når hålet vara T. När $x(T) = L$ måste $y(T) = h$. Ekvationerna ovan ger då att

$$L - \frac{1}{2}gT^2 = h$$

och alltså att $T^2 = 2(L-h)/g$. Detta insatt i $x(T) = L$ ger att $(v/\sqrt{2})\sqrt{2(L-h)/g} = L$, så att vi får, **Svar:** att farten måste vara

$$v = \sqrt{\frac{gL^2}{L-h}}.$$

Uppgift 2: En kula, som har massan m, skjuts med horisontell hastighet in i en träkloss. Klossen har massa M och ligger på ett glatt underlag. Den är fäst i en horisontell fjäder med styvhet k som initialt är ospänd. Kulan fastnar i klossen och fjädern trycks därefter ihop sträckan s innan klossen vänder. ($s < l$ där l är fjäderns naturliga längd.) Vilken fart hade kulan?



Figur 2: Figuren visar situationen innan kulan träffar och stannar i klossen.

Lösning 2: Här delar man in problemet i två delar. Den första delen är ett stötförlopp och sker under mycket kort tid när kulan träffar klossen och stannar i den. Stora krafter verkar då mellan kula och kloss och inverkan från fjädern kan försummas. När kulan är stilla inne i klossen börjar ett svängningsförlopp under inverkan av fjäderna. Vid stötförloppet är rörelsemängden bevarad eftersom de yttre krafterna inte har någon inverkan. Detta ger ekvationen:

$$mv = (M + m)v'$$

för farten v' som kloss med kula har efter stöten.

Nu börjar kloss med kula att röra sig med v' och pressa ihop fjädern. Eftersom fjäderkraften är konservativ får man att den kinetiska energin helt har övergått till potentiell när klossen vänder. Detta ger

$$\frac{1}{2}(M + m)v'^2 = \frac{1}{2}ks^2,$$

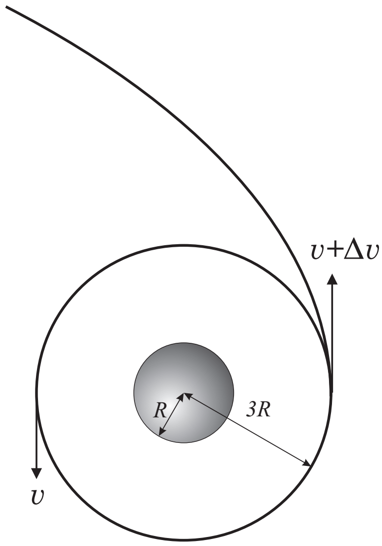
där s är fjäderns maximala sammanpressning.

Kombineras dessa ekvationer fås lätt att ursprungsfarten för kulan var

Svar:

$$v = s\frac{\sqrt{k(M + m)}}{m}.$$

Uppgift 3: En satellit rör sig i en cirkelbana kring jorden med radien $3R$ där R är jordradien. Beräkna den minsta fartökning som krävs för att satelliten skall lämna jordens närhet för gott. Tyngdaccelerationen g får införas.



Figur 3: Bild till Uppgift 3. Det som krävs är övergång från cirkelbanan till parabelbana.

Lösning 3: Låt v vara farten i cirkelbanan. Normalkomponenten av kraftekvationen ger då

$$m\frac{v^2}{3R} = m\frac{gR^2}{(3R)^2}$$

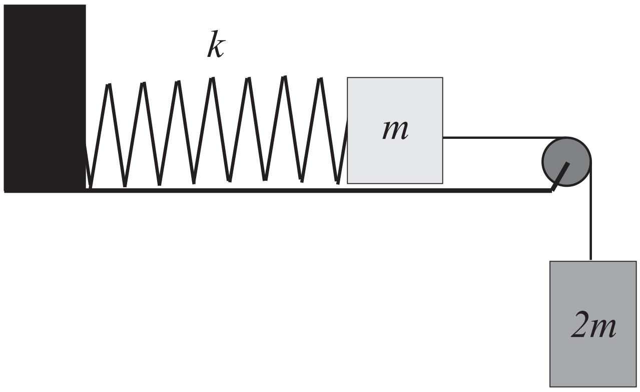
så att $v = \sqrt{gR/3}$. Låt v_e vara den fart som tar satelliten från cirkelbanan till oändligheten där farten går mot noll. Energins bevarande ger då

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - m\frac{gR^2}{3R} = \frac{1}{2}m0^2 - m\frac{gR^2}{\infty} = 0.$$

Detta ger $v_e = \sqrt{2gR/3}$. Den nödvändiga fartökningen är alltså **Svar:**

$$\Delta v = v_e - v = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}\sqrt{gR}.$$

Uppgift 4: En kropp med massa m ligger på ett glatt horisontellt underlag och är fäst i en fjäder med styvhet k. Via en lätt och lättrörlig trissa går en lina från denna kropp till en annan kropp med massa $2m$ som hänger i den vertikala delen av linan. Bestäm egenvinkelfrekvensen ω_n för systemet under förutsättning att linan förblir spänd under rörelsen.



Figur 4: Systemet i Uppgift 4.

Lösning 4:
Lägg en x-axel år höger horisontellt och låt $x = 0$ svara mot den ospända fjädern. Friläggning av de två kropparna ger då att deras kraftekvationer blir

$$m\ddot{x} = -kx + S,$$

$$2m\ddot{x} = -S + 2mg.$$

Här är S spännkraften i linan och så länge den är spänd har kropparna samma rörelse (bortsett från riktning). Ur den andra av dessa ekvationer fås,

$$S = 2mg - 2m\ddot{x}.$$

Sätts detta in i den första får man $3m\ddot{x} + kx = 2mg$. Det vill säga

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 2mg,$$

Där alltså vinkelfrekvensen är **Svar:**

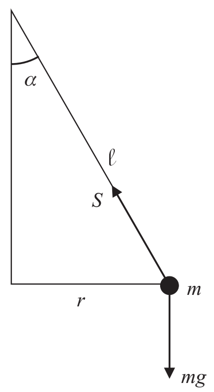
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{3m}}.$$

.

Teoritentamen

Uppgift 5: Härled komponenterna för hastigheten och accelerationen i cylinderkoordinater (r, θ) längs basvektorerna $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta$. Härledning av basvektorernas tidsderivator och tydlig figur skall ingå!
Svar 5: Detta hittar du lätt i läroböckerna.

Uppgift 6: En konisk pendel är en partikel som hänger i en tråd och rör sig i en horisontell cirkelbana. Partikelns fart i cirkelbanan är v, trådens längd är ℓ och cirkelbanans radie är r. Frilägg partikeln och ställ upp kraftekvationens komponenter längs lämpliga riktningar (dvs. dess rörelseekvationer).



Figur 5: Konisk pendel sedd från sidan med krafterna på partikeln utsatta.

Svar 6: Inför naturliga komponenter längs cirkelbanan. Kalla spännkraften i tråden S. Kraftekvationens normalkomponent (horisontell) blir då

$$m\frac{v^2}{r} = S \sin\alpha$$

Där α är halva konens toppvinkel. Längs tangenten verkar inga krafter och längs binormalen (vertikala riktningen) fås jämviktsekvationen

$$0 = S\cos\alpha - mg.$$

Enligt triangelns geometri har vi att $\sin\alpha = r/\ell$ och $\cos\alpha = \sqrt{\ell^2 - r^2}/\ell$.

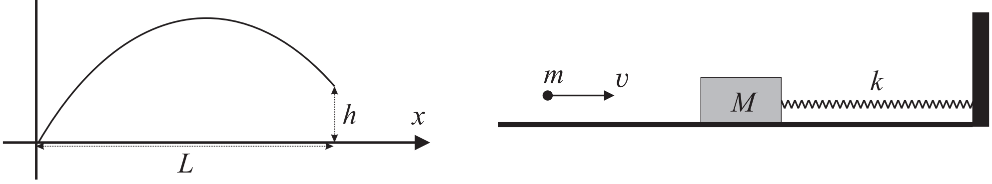
Uppgift 7: Bestäm uttrycket för rörelsemängdsmomentet $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ uttryckt i cylinderkoordinater vid plan rörelse. Vilket samband mellan $\dot{\theta}$ och r fås om rörelsemängdsmomentet är konstant, med beloppet H?
Svar 7: $\boldsymbol{H} = mr^2\dot{\theta}\boldsymbol{e}_z$ och $\dot{\theta} = H/(mr^2)$.

Uppgift 8: Vilka är Keplers tre lagar för planetrörelse? Härled en av dem.
Svar 8: Detta finns i avsnitt 11.1, sid. 249 i Christer Nyberg, Mekanik – Grundkurs eller i Apazidis Kapitel 12. Den som är lättast att härleda är den om sektorshastighetens konstans. Den visas på sid. 251 i Nyberg och sid 328 i Apazidis.

KTH Mekanik **2013 05 23**

Mekanik mk, SG1102, Problemtentamen 2013 05 23, kl 14-18

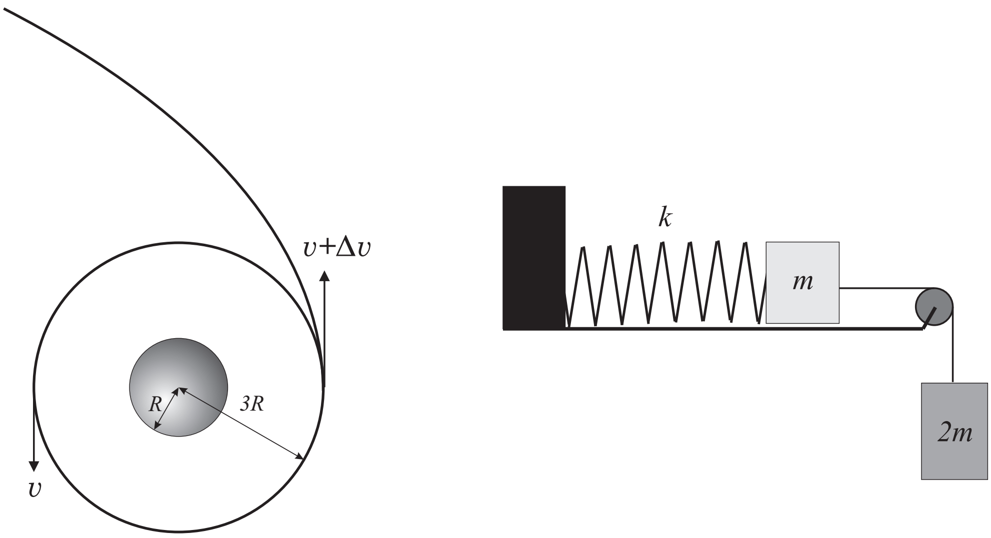
Uppgift 1: Längre slag i golf påverkas kraftigt av luften. För kortare ”chippar” är däremot luftmotståndet försumbart. En golfspelare vill slå bollen från en bunker ner i hålet på en green som ligger på det horisontella avstådet L från bollen och på höjden h ovanför bollen. Klubban är vinklad så att utgångshastigheten bildar vinkeln $45°$ med horisontalen. Vilken fart måste bollen ha?



Figur 1: Till vänster illustreras Uppgift 1. Till höger visas systemet i Uppgift 2.

Uppgift 2: En kula, som har massan m, skjuts med horisontell hastighet in i en träkloss. Klossen har massa M och ligger på ett glatt underlag. Den är fäst i en horisontell fjäder med styvhet k som initialt är ospänd. Kulan fastnar i klossen och fjädern trycks därefter ihop sträckan s innan klossen vänder. ($s < l$ där l är fjäderns naturliga längd.) Vilken fart hade kulan?

Uppgift 3: En satellit rör sig i en cirkelbana kring jorden med radien $3R$ där R är jordradien. Beräkna den minsta fartökning som krävs för att satelliten skall lämna jordens närhet för gott. Tyngdaccelerationen g får införas.



Figur 2: Till vänster illustreras Uppgift 3. Till höger visas systemet i Uppgift 4.

Uppgift 4: En kropp med massa m ligger på ett glatt horisontellt underlag och är fäst i en fjäder med styvhet k. Via en lätt och lättrörlig trissa går en lina från denna kropp till en annan kropp med massa $2m$ som hänger i den vertikala delen av linan. Bestäm egenvinkelfrekvensen ω_n för systemet under förutsättning att linan förblir spänd under rörelsen.

Skriv aldrig flera uppgifter på samma papper. HE 2013 05 23

Teoritentamen

Uppgift 5: Härled komponenterna för hastigheten och accelerationen i cylinderkoordinater (r, θ) längs basvektorerna $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta$. Härledning av basvektorernas tidsderivator och tydlig figur skall ingå!

Uppgift 6: En konisk pendel är en partikel som hänger i en tråd och rör sig i en horisontell cirkelbana. Partikelns fart i cirkelbanan är v, trådens längd är ℓ och cirkelbanans radie är r. Frilägg partikeln och ställ upp kraftekvationens komponenter längs lämpliga riktningar (dvs. dess rörelseekvationer).

Uppgift 7: Bestäm uttrycket för rörelsemängdsmomentet $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ uttryckt i cylinderkoordinater vid plan rörelse. Vilket samband mellan $\dot{\theta}$ och r fås om rörelsemängdsmomentet är konstant, med beloppet H?

Uppgift 8: Vilka är Keplers tre lagar för planetrörelse? Härled en av dem!

Problem- och teoritentamen är olika tentamensmoment. Har du klarat kontrollskrivningar är teoridelen redan godkänd. Varje uppgift ger högst 3 (tentamens)poäng. På vardera delen kan man högst få 12 poäng och för godkänt fordras minst 4 poäng. För att kursen skall vara klar i sin helhet måste du också ha fått godkänt på inlämningsuppgifter.

Enda tillåtna hjälpmedel: skriv- och ritdon inklusive suddgummi.

HE 2013 05 23