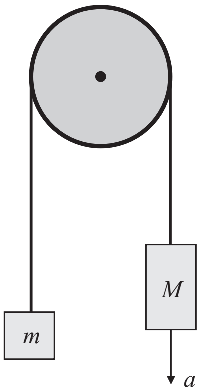
Mekanik mk, SG1102, Problemtentamen 2013 08 20, kl 14-18

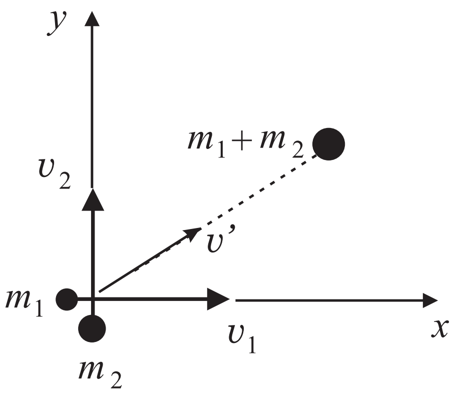
Uppgift 1: En bil börjar accelerera med $\ddot{x}(0) = a_0$ från stillastående. Accelerationen avtar exponentiellt och ges av $\ddot{x}(t) = a_0 \exp(-t/\tau)$, d.v.s. accelerationen har sjunkit till a_0/e efter tiden τ. Beräkna sluthastigheten $v_\infty = \lim_{t\to\infty} \dot{x}(t)$ (1 poäng) samt efter hur lång tid $4/5$ (eller 80%) av sluthastigheten har uppnåtts (2 poäng)!

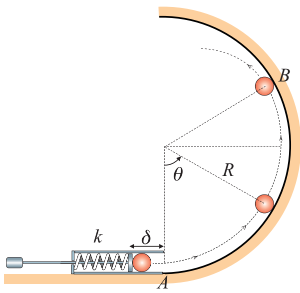
Uppgift 2: Två kroppar är upphängda i vardera änden av en tråd som löper över en lätt och lättrörlig trissa. Den tyngre av kropparna has massan M och när systemet släpps från vila får denna accelerationen a nedåt. Beräkna den lättare kroppens massa m uttryckt i tyngdaccelerationen g, samt givna storheter!



Figur 1: Systemet i Uppgift 2.

Uppgift 3: Två partiklar glider sig på ett strävt horisontalplan med vinkelräta hastigheter när de plötsligt krockar och fastnar i varandra. Glidfriktionstalet är μ. Partiklarna har massorna m_1 och m_2 och just innan de krockar har de farterna v_1 respektive v_2. Hur långt glider de efter krocken?





Figur 2: Till vänster illustreras Uppgift 3. Till höger visas systemet i Uppgift 4.

Uppgift 4: En kula skjuts iväg med en fjäder av styvhet k som trycks ihop och släpps. Hur lång sträcka δ måste fjädern tryckas ihop om kulan, som från början har en horisontell hastighet, i den fortsatta rörelsen precis klarar att följa ett glatt halvcirkelformat vertikalt spår av radien R, hela vägen, utan att släppa?

Skriv aldrig flera uppgifter på samma papper. HE 2013 05 23

Teoritentamen

Uppgift 5: Definiera skalärprodukten (1 poäng) och vektor- eller kryssprodukten (2 poäng) av två vektorer, $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$, dels geometriskt med hjälp av längder och vinklar mm., dels i termer av vektorernas komponenter i någon ortogonal högerorienterad bas i det tredimensionella rummet.

Uppgift 6: Härled de naturliga komponenterna av hastigheten och accelerationen uttryckt i bågländens (s) tidsderivator $\dot{s}$, $\ddot{s}$, samt krökningsradien ρ. Härledning de tidsderivator av basvektorerna, $\boldsymbol{e}_t, \boldsymbol{e}_n$, som behövs, och tydlig figur, skall ingå!

Uppgift 7: a) Definiera vad som menas med en konservativ kraft. (1p)
b) Ange potentiella energin för fjäderkraft, tyngdkraft och Newtonsk gravitation. (2p)

Uppgift 8: Studera rörelseekvationen för en fri dämpad svängning, $m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$. Vilka tre olika fall kan förekomma? Skriv upp den allmänna lösningen för ett av dessa!

Problem- och teoritentamen är olika tentamensmoment. Har du klarat kontrollskrivningar är teoridelen redan godkänd. Varje uppgift ger högst 3 (tentamens)poäng. På vardera delen kan man högst få 12 poäng och för godkänt fordras minst 4 poäng. För att kursen skall vara klar i sin helhet måste du också ha fått godkänt på inlämningsuppgifter.

Enda tillåtna hjälpmedel: skriv- och ritdon inklusive suddgummi.

HE 2013 08 20

Mekanik mk, SG1102, Lösningar till problemtentamen, 2013 08 20

Uppgift 1: En bil börjar accelerera med $\ddot{x}(0) = a_0$ från stillastående. Accelerationen avtar exponentiellt och ges av $\ddot{x}(t) = a_0 \exp(-t/\tau)$, d.v.s. accelerationen har sjunkit till a_0/e efter tiden τ. Beräkna sluthastigheten $v_\infty = \lim_{t\to\infty} \dot{x}(t)$ (1 poäng) samt efter hur lång tid $4/5$ (eller 80%) av sluthastigheten har uppnåtts (2 poäng)!

Lösning 1: Farten fås genom integration av accelerationen:

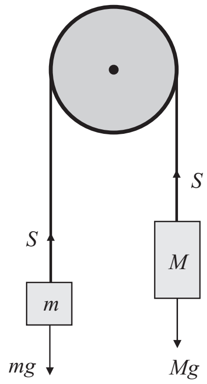
$$\dot{x}(t) = \int_0^t a_0 \exp(-t/\tau)\, \mathrm{d}t = | - a_0\tau \exp(-t/\tau)|_0^t = a_0\tau[1 - \exp(-t/\tau)]$$

där integrationskonstanten bestäms av att $\dot{x}(0) = 0$. Ur detta fås direkt att
Svar 1: $v_\infty = a_0\tau$.
Sätter man $\dot{x}(T) = (4/5)a_0\tau$ får man ekvationen

$$a_0\tau[1 - \exp(-T/\tau)] = (4/5)a_0\tau$$

som ger, $\exp(T/\tau) = 5$, vilket ger svaret
Svar 2: $T = \tau \ln 5 \approx 1,61\,\tau$.

Uppgift 2: Två kroppar är upphängda i vardera änden av en tråd som löper över en lätt och lättrörlig trissa. Den tyngre av kropparna has massan M och när systemet släpps från vila får denna accelerationen a nedåt. Beräkna den lättare kroppens massa m uttryckt i tyngdaccelerationen g, samt givna storheter!



Figur 1: Systemet i Uppgift 2 frilagt.

Lösning 2: Låt en x-axel vara uppåt på vänster sida och en annan ner på höger sida. Om vi betecknar spännkraften i tråden med S blir rörelseekvationenrna efter friläggning,

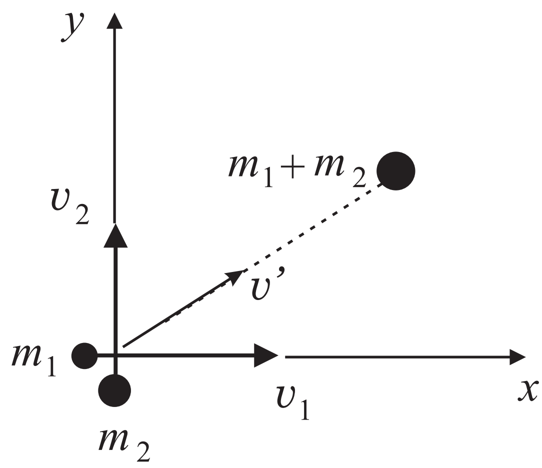
$$m\ddot{x} = S - mg,$$

$$M\ddot{x} = Mg - S.$$

eftersom accelerationen upp på vänster sida måste vara samma som accelerationen ner på höger. Dessutom är det givet att $\ddot{x} = a$. Elimineras S fås att $M(g - a) = m(g + a)$ och således att,
Svar:

$$m = M(g - a)/(g + a).$$

Uppgift 3: Två partiklar glider sig på ett strävt horisontalplan med vinkelräta hastigheter när de plötsligt krockar och fastnar i varandra. Glidfriktionstalet är μ. Partiklarna har massorna m_1 och m_2 och just innan de krockar har de farterna v_1 respektive v_2. Hur långt glider de efter krocken?



Figur 2: Här illustreras Uppgift 3.

Lösning 3: Vid krocken är rörelsemängden bevarad. Detta ger,

$$m_1 v_1 \boldsymbol{e}_x + m_2 v_2 \boldsymbol{e}_y = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}',$$

där $\boldsymbol{v}'$ är hastigheten omedelbart efter krocken.

Omedelbart efter krocken är då kinetiska energin för den hopslagna partikeln,

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}{m_1 + m_2}.$$

När friktionskraften har stannat denna hopslagna partikel har den uträttat arbetet $-T$ enligt lagen om kinetiska energin. Eftesom normalkraften är lika med tyngdkraften, $N = (m_1 + m_2)g$, fås för glidfriktionskraften $f = \mu N = \mu(m_1 + m_2)g$. Friktionskraften uträttar alltså arbetet,

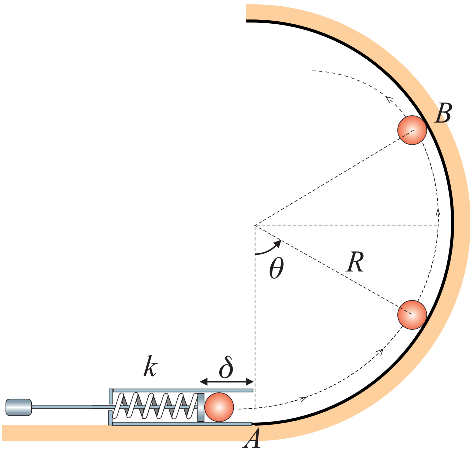
$$-\mu(m_1 + m_2)g\ell = 0 - T,$$

där ℓ är sträckan som partikeln rört sig (eftersom kraften hela tiden är antiparallell med förflyttningen). Alltså fås,

Svar: Sträckan som det glider blir

$$\ell = \frac{1}{2\mu g}\frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Uppgift 4: En kula skjuts iväg med en fjäder av styvhet k som trycks ihop och släpps. Hur lång sträcka δ måste fjädern tryckas ihop om kulan, som från början har en horisontell hastighet, i den fortsatta rörelsen precis klarar att följa ett glatt halvcirkelformat vertikalt spår av radien R, hela vägen, utan att släppa?



Figur 3: Systemet i Uppgift 4.

Lösning 4:
Fjädern ger partikeln en kinetisk energi som alltså är,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}k\delta^2,$$

i lägsta punkten A. Farten är då, $v_0 = \sqrt{k/m}\delta$.

Därefter gäller att endast tyngdkraften uträttar arbete och att energins bevarande ger,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR(1 - \cos\theta).$$

Kraftekvationens ($m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$) normalkomponent (naturliga komponenter) ger,

$$m\frac{v^2}{R} = N - mg\cos\theta.$$

Om normalkraften N precis blir 0 i högsta punkten, $\theta = \pi$, fås att $v^2 = gR$ där. Sätter man in detta i energiekvationen, med $\theta = \pi$ får man,

$$\frac{1}{2}mgR = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR(1 - \cos\pi) \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}mgR = \frac{1}{2}k\delta^2 - 2mgR.$$

så, $gR = (k/m)\delta^2 - 4gR$, vilket ger
Svar:

$$\delta = \sqrt{\frac{5mgR}{k}}.$$

Teoritentamen

Alla uppgifter finns besvarade i läroböckerna.

HE 2013 08 20