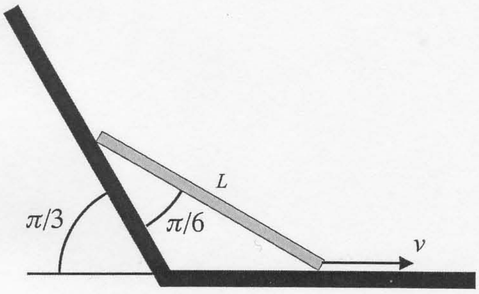
Mekanik II, SG1140, 2010 06 09, kl 09.00-13.00

Problemtentamen

Uppgift 1: En kvadratisk platta glider med övre sidan längs ett sluttande plan och nedre sidan längs ett horisontellt golv. Det sluttande planet bildar vinkeln $\pi/3 = 60°$ med horisontalplanet. Plattan har sidolängd L och massa m. När plattan bildar vinkeln $\pi/6 = 30°$ med det sluttande planet har den nedre sidan farten v längs golvet. Beräkna plattans kinetiska energi.



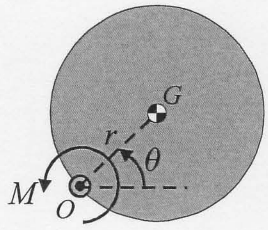
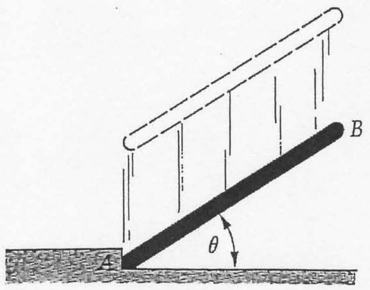


Figure 1: Bilder till Uppgift 1 respektive 2

Uppgift 2:

En homogen cirkulär skiva med radien r och massan m kan rotera friktionsfritt i vertikalplanet kring en horisontell axel genom O. Skivan påverkas av ett konstant kraftmoment M. Bestäm skivans vinkelhastighet ω som funktion av vinkeln θ om den släpps från vila då $\theta = 0$.

Uppgift 3:



En homogen stång AB med längden l faller rakt neråt med enbart translationshastighet. Vinkeln mellan stången och horisontalen är θ. När stångens hastighet är v_0 stöter änden A emot ett golv intill ett trappsteg på ett sådant sätt att änden A ligger stilla efter stöten. Bestäm stångens vinkelhastighet omedelbart efter stöten.

Uppgift 4:

Ett lok med massan m befinner sig på latituden λ på norra halvklotet och färdas med farten v i sydlig riktning.

Bastäm till storlek och riktning Corioliskraften på loket. Jordens vinkelhastighet är ω.

Teoritentamen

Uppgift 5: Betrakta ett partikelsystem bestående av 3 partiklar. Dessa har massorna $m_1 = M$ och $m_2 = 3M$ och $m_3 = 6M$, vid en viss tidpunkt, hastigheterna $\boldsymbol{v}_1 = 6v\,\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{v}_2 = 2v\,\boldsymbol{e}_y$ och $\boldsymbol{v}_3 = v\,\boldsymbol{e}_z$. Beräkna, vid denna tidpunkt,
a) systemets rörelsemängd,
b) systemets masscentrumhastighet,
c) de två delarna av systemets kinetiska energi (energin på grund av masscentrums rörelse och energin för rörelsen relativt masscentrumsystemet).

Uppgift 6: Antag att ett partikelsystem är en stel kropp med vinkelhastighetsvektor $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_z$. Tag fram (härled) uttrycket för kinetiska energin för kroppen uttryckt i tröghetsmoment vinkelhastighet.

Uppgift 7: Härled tröghetsmomentet för en smal homogen stav, med massa m och längd L, för en axel, vinkelrät mot staven, genom ena ändpunkten.

Uppgift 8: Härled Coriolis teorem, dvs. sambandet mellan den absoluta och den relativa accelerationen för en partikel uttryckt i dessa accelerationer samt origos acceleration, vinkelhastighetsvektorn och dess tidsderivata, relativa läget och relativa hastigheten.

Problem- och teoritentamen är olika tentamina. På vardera delen kan man högst få 12 poäng och för godkänt fordras minst 4 poäng. Har du klarat kontrollskrivningar är teoridelen redan godkänd. För att kursen skall vara klar i sin helhet måste du också ha fått godkänt på inlämningsuppgifter.

Tillåtna hjälpmedel: skriv- och ritdon inklusive suddgummi.

HE m.fl. 2010 06 09

Lösningar till tentamen Mekanik II, SG1140, 2010 06 09

Uppgift 1.

Konstruera momentancentrum C. Då bildar staven och linjerna mellan ändpunkterna och C en liksidig triangel. Höjden h i denna fås ur Pytagoras sats $h^2 + (L/2)^2 = L^2$ så $h = \sqrt{3}L/2$. Då C är momentancentrum fås $v = L\omega$ så vinkelhastigheten är

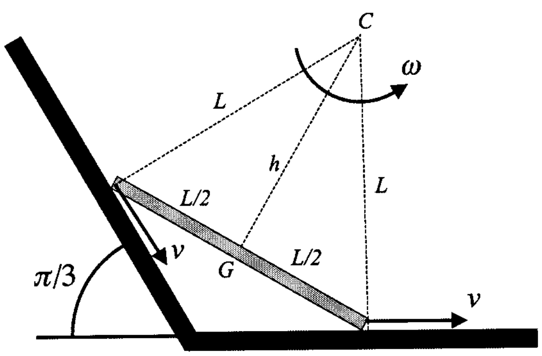
$$\omega = v/L.$$

Vidare är

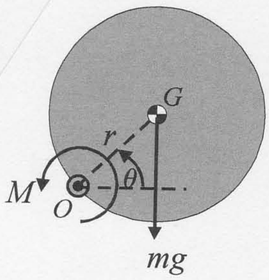
$$v_G = h\omega = hv/L = \sqrt{3}v/2.$$

Enligt Königs teorem är kinetiska energin $T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$. Här är tröghetsmomentet $I_G = mL^2/12$. Detta ger

Svar: $T = \frac{5}{12}mv^2$.



Uppgift 2.



Lösning:

1) Använd lagen om den kinetiska energin

$$U = T - T_0 \quad (1)$$

2) Bestäm arbetet

$$U = \int_0^\theta (M - mgr\cos\theta)d\theta = M\theta - mgr\sin\theta \quad (2)$$

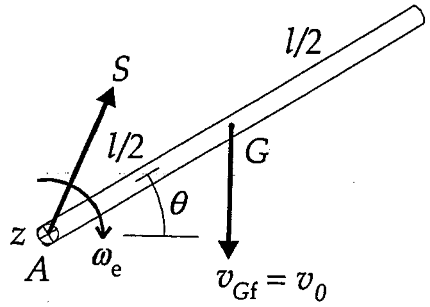
3) Bestäm kinetiska energin

$$T = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{2} mr^2\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} mr^2\dot{\theta}^2 \quad (3)$$

4) Insättning av (2) och (3) i (1) ger

$$\underline{\underline{\omega = \dot{\theta} = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{M\theta - mgr\sin\theta}{mr^2}}}}$$

Uppgift 3.



Eftersom stötkrafter endast uppträder i A så blir stötimpulsmomentet map A lika med noll. Det betyder att rörelsemängdsmomentet map A omedelbart före och efter stöten blir lika dvs

$$\mathbf{H}_{A\text{före}} = \mathbf{H}_{A\text{efter}}$$

Om momenten räknas positiva medurs blir

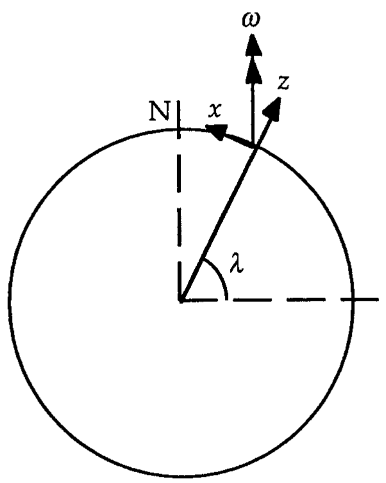
$$H_{A\mathrm{f}} = I_G \omega_\mathrm{f} + m v_{G\mathrm{f}} d = 0 + m v_0 \frac{l}{2}\cos\theta$$

$$H_{A\mathrm{e}} = I_A \omega_\mathrm{e} = \frac{1}{3} m l^2 \omega_\mathrm{e}$$

vilket medför att

$$\underline{\underline{\omega_\mathrm{e} = \frac{3}{2}\cdot\frac{v_0}{l}\cos\theta}}$$

Uppgift 4.



$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}_{Cor} &= -2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{rel} \\
&= -2m\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \omega\cos\lambda & 0 & \omega\sin\lambda \\ -v & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 2m\,\omega\,v\sin\lambda\mathbf{e}_y
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Corioliskraften är riktad rakt åt väster och dess belopp är $2m\,\omega\,v\sin\lambda$.