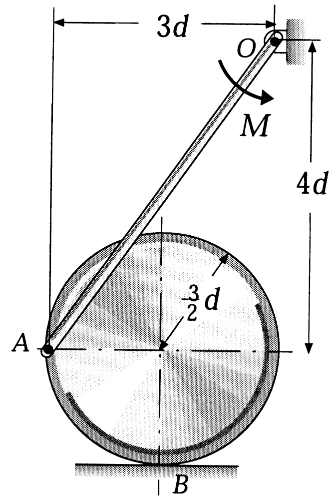
Mekanik I (SG1130, SG1103) för BD1, M1 samt F1, T1
Mekanik för I (SG1109) för I1

Omtentamen, 2009 augusti 24, kl 09.00-13.00

Tillåtna hjälpmedel: endast skriv- och rithjälpmedel

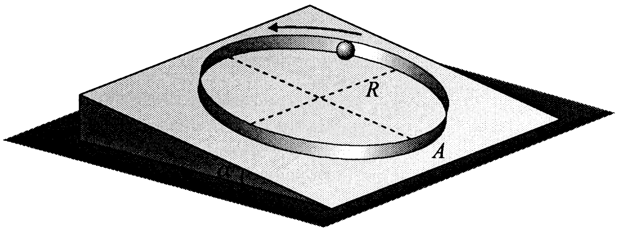
Problem

1



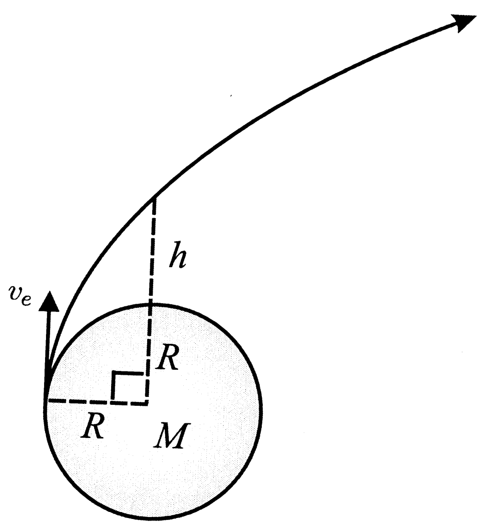
En homogen cylinder med tyngden mg vilar på en horisontell yta, varvid friktionstalet vid B är μ. En lätt stång OA är glatt ledad i A och den fixa punkten O. Bestäm, för den givna geometrin, det största kraftparsmoment M som kan anbringas stången utan att systemet börjar röra sig.

2



En partikel med massan m rör sig på insidan av en cirkelformad skena med radien R som är fäst på ytan av ett lutande plan med lutningsvinkeln α. Partikeln ges i den lägsta punkten A en tillräckligt stor fart v som möjliggör dess rörelse längs skenan. Man observerar att normalkraften från skenan på partikeln i A har halverats efter ett varv. Bestäm friktionsförlusterna eller friktionskrafternas arbete då partikeln har rört sig ett varv från A och åter till A.

3



En kropp skjuts upp från en planet. Från början har den precis så stor hastighet v_e att den just når oändligheten med farten noll. v_e kallas *flykthastigheten.* Antag att planeten är ett klot med massan M och radien R.

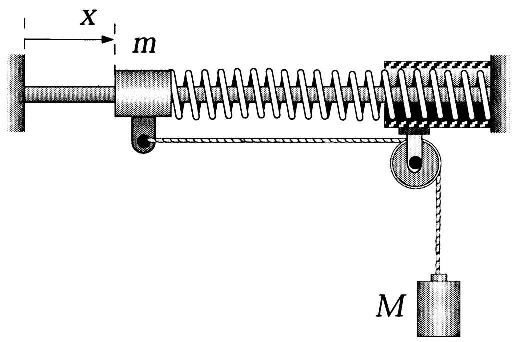
a) Beräkna flykthastigheten uttryckt i M och R samt Newtons gravitationskonstant G.

Antag nu att en satellit avfyras med v_e i en horisontell riktning från en punkt på planeten.

b) Vilken höjd h har satelliten när den passerar i zenit 90° bort på planeten i avfyrningsrikningen? Från atmosfär och luftmotstånd bortses. Ledning: I cylinderkoordinater ges banan vid centralrörelse av $r = \ell/(1 + e\cos\theta)$, där r är avståndet från kraftcentrum och e kallas excentriciteten. Vad måste e vara om r precis kan bli oändligt?

vänd

4



Figuren visar ett vertikalplan. En kropp med massan m är rörlig på en glatt horisontell stång och är i kontakt med en fjäder med fjäderkonstant k. Från denna kropp går en tråd över en fix liten lättrörlig trissa och håller i andra änden en annan kropp med massan M. Rörelsen startar då fjädern har sin naturliga längd och $x = 0$. Bestäm
a) perioden för systemets svängningar,
b) maximala fjäderförkortningen.

5

Teoridelen

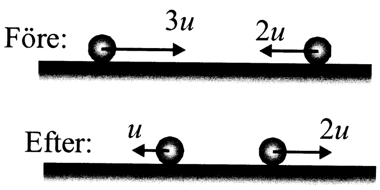
a) Betrakta ett helt godtyckligt kraftsystem (rita figur!) och härled den s k sambandsformeln för kraftmoment med avseende på två punkter.
b) Ange, med hjälp av definitionen, villkoret för att två kraftsystem skall vara ekvimomenta.
c) Vad menas med resultanten (reduktionsresultatet) till ett givet kraftsystem?

6

a. Definiera vad som menas med en konservativ kraft och härled uttrycket för denna krafts arbete U_{1-2}. (1p)

b. Härled uttrycket för den allmänna gravitationskraftens potentiella energi $V(r)$. (1p)

c.



Betrakta två lika partiklar, vardera med massan m som rör sig friktionsfritt på ett glatt horisontellt underlag med hastigheterna $3u$ resp $2u$ mot varandra och sammanstöter. Efter stöten är partiklarnas hastigheter enligt figuren. Bestäm studstalet e.

(1p)

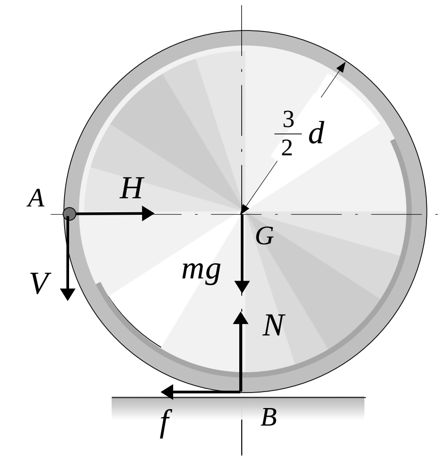
7

En partikel med massa m rör sig i ett plan som väljs till xy-planet. Uttryck partikelns läge och hastighet i (plan polära) cylinderkoordinater (r, θ) och beräkna dess rörelsemängdsmomentvektor. Tag Origo till momentpunkt.

8

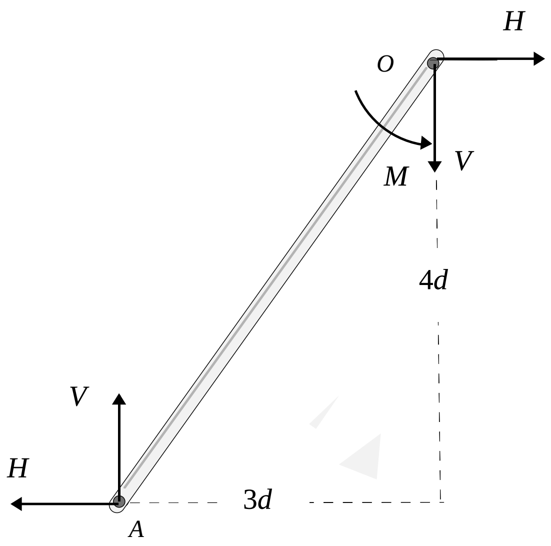
Skriv upp rörelseekvationen (kraftekvationen, differentialekvationen) för en enkel harmonisk oscillator. Visa hur lösningen (läget som funktion av tiden) bestäms för ett givet allmänt begynnelsevillkor!

Problem- och teoritentamen är olika tentamina, dvs examinationsmoment, vars resultat registreras och ger kurspoäng vid godkänt. Varje uppgift ger högst 3 (tentamens)poäng. På vardera delen kan man högst få 12 poäng och för godkänt fordras minst 4 poäng. Har du klarat kontrollskrivningar är teoridelen redan godkänd. För att kursen skall vara klar i sin helhet måste du också ha fått godkänt på inlämningsuppgifter.



Frilägg cylindern och den lätta stången! Stången påverkas av kraftparsmomentet M samt kontaktkrafter i A och O. Cylindern påverkas av kontaktkrafter i A och B samt tyngdkraften mg.

Betrakta först cylindern och inför f och N vid B! Inför komponenterna H och V vid A! Utnyttja sedan lagen om verkan och motverkan för krafterna på stången i A.



Jämvikt fordrar för:

Stången:

$$\circlearrowleft O: \quad M - H \cdot 4d - V \cdot 3d = 0 \qquad (1)$$

Cylindern:

$$\circlearrowleft G: \quad \frac{3}{2}d \cdot (V - f) = 0 \qquad (2)$$

$$\rightarrow: \quad H - f = 0 \qquad (3)$$

$$\uparrow: \quad N - mg - V = 0 \qquad (4)$$

Eftersom gränsfallet mot glidning skall undersökas kan friktionsvillkoret $f = \mu N$ ansättas direkt. Det sökta kraftparsmomentet ges av (1).

Ekvationerna (2) - (3) ger $\quad H = V = f = \mu N \qquad (5)$

Ekvation (4) ger då $\quad N = \dfrac{1}{1-\mu} mg \qquad (6)$

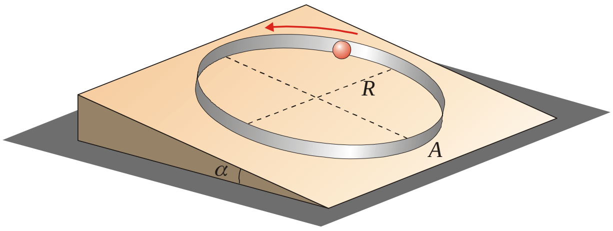
Insättning i ekv (1) ger

$$M = \mu N \cdot 4d + \mu N \cdot 3d \quad \Rightarrow \qquad (7)$$

$$M = 7\mu N \cdot d \quad \Rightarrow \qquad (8)$$

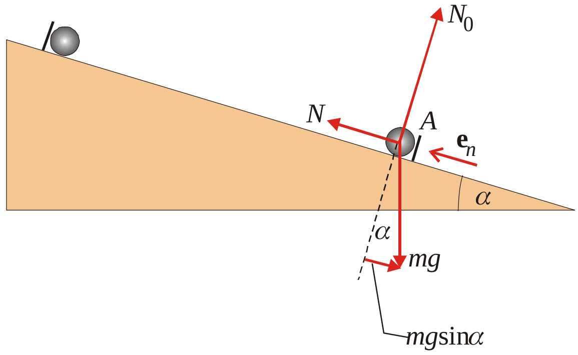
$$\underline{\underline{M = \frac{7\mu}{1-\mu} mgd}}$$

2)



En partikel med massan m rör sig på insidan av en cirkelformad skena med radien R som är fäst på ytan av ett lutande plan med lutningsvinkeln α. Partikeln ges i den lägsta punkten A en tillräckligt stor fart v som möjliggör dess rörelse längs skenan. Man observerar att normalkraften från skenan på partikeln i A har halverats efter ett varv. Bestäm friktionsförlusterna eller friktionskrafternas arbete då partikeln har rört sig ett varv från A och åter till A.

Lösning



1) Formulera kraftekvationen i normalriktningen i A,

$$\mathbf{e}_n: \quad m\frac{v_A^2}{R} = N - mg\sin\alpha$$

$\Rightarrow \quad N = mg\sin\alpha + m\frac{v_A^2}{R}$. Normalkrafterna från skenan i början och efter ett varv i A blir:

$$N_1 = mg\sin\alpha + m\frac{v_1^2}{R}, \quad N_2 = mg\sin\alpha + m\frac{v_2^2}{R},$$

där $v_1 = v$ och v_2 är farten i A efter ett varv.

2) Bestäm sambandet mellan v_1 och v_2. Vi har $N_1 = 2N_2$, vilket ger

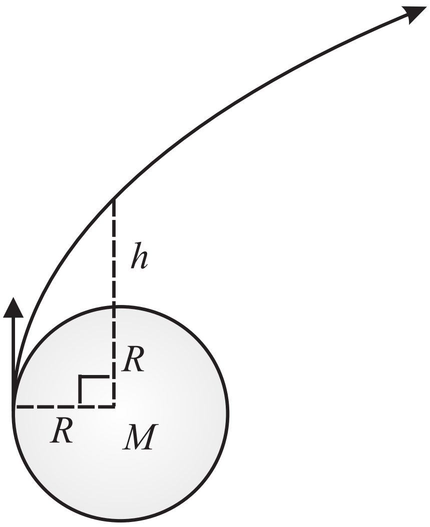
$$mg\sin\alpha + m\frac{v_1^2}{R} = 2mg\sin\alpha + 2m\frac{v_2^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v_2^2 = \frac{1}{2}v_1^2 - \frac{1}{2}gR\sin\alpha$$

3) Använd lagen om den kinetiska energin och beräkna friktionsarbetet. Obs att tyngkraftens arbete är noll från A till A. Vi har:

$$U_{1-2} = T_2 - T_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m\left[\frac{1}{2}v_1^2 - \frac{1}{2}gR\sin\alpha - v_1^2\right] = \underline{\underline{-\frac{m}{4}\left[v^2 + gR\sin\alpha\right]}}$$

eftersom $v_1 = v$

Uppgift 3:
En kropp skjuts upp från en planet. Från början har den precis så stor hastighet v_e att den just når oändligheten med farten noll. v_e kallas *flykthastigheten.* Antag att planeten är ett klot med massan M och radien R.
a) Beräkna flykthastigheten uttryckt i M och R samt Newtons gravitationskonstant G.
Antag nu att en satellit avfyras med v_e i en horisontell riktning från en punkt på planeten.
b) Vilken höjd h har satelliten när den passerar i zenit $90°$ bort på planeten i avfyrningsrikningen? Från atmosfär och luftmotstånd bortses. Ledning: I cylinderkoordinater ges banan vid centralrörelse av $r = \ell/(1 + e\cos\theta)$, där r är avståndet från kraftcentrum och e kallas excentriciteten. Vad måste e vara om r precis kan bli oändligt?



Figur 1:

Lösning 3:
a) Energins bevarande $T + V = E$ ger oss i detta fall

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GmM}{R} = \frac{1}{2}m0^2 - \frac{GmM}{\infty} = 0$$

där $E = 0$ följer av informationen om sluttillståndet. Ur denna ekvation löser man lätt:
Svar 1a:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

b) I uttrycket för banan kan excentriciteten vara $e = 0$ vilket ger en cirkelbana, eller $0 < e < 1$ vilket ger banor som inte kan nå oändligheten, alltså ellipser. För $e = 1$ kan oändliheten precis uppnås (när $\theta = \pi$). Alltså svarar $e = 1$ mot en bana med flykthastigheten vid planetytan.

Vid uppskjutningen har man då

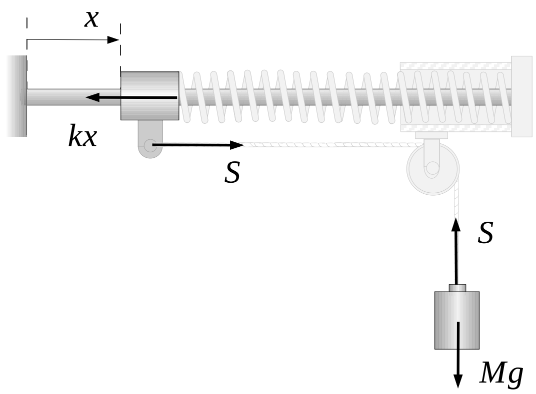
$$R = r(0) = \ell/[1 + 1 \cdot \cos(0)] = \ell/2.$$

Detta ger att $\ell = 2R$. Vid $90° = \pi/2$ får man då avståndet till

$$r(\pi/2) = 2R/[1 + 1 \cdot \cos(\pi/2)] = 2R.$$

Den sökta höjden h fås om R subtraheras från detta avstånd. Alltså fås
Svar 1b:

$$h = R$$



I figuren har de två kropparna frilagts. Kropparna har samma fart eftersom tråden är oelastisk. Man kan välja att starta med att skriva upp kraftekvationen för vardera kroppen, men eftersom den maximala fjäderförkortningen inträffar vid ett vändläge (då farten är noll), väljer vi här att börja med att skriva upp en energiekvation, förslagsvis lagen om mekaniska energins bevarande

$$T + V = T_0 + V_0 \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - Mgx + \frac{1}{2}kx^2 = 0+0+0+0 \tag{2}$$

Vändläge innebär att $\dot{x} = 0$. Insättning i ekv (2) ger då lösningen $x = 0$ (startläget) och

den maximala fjäderförkortningen $\quad \underline{\underline{x_1 = \dfrac{2Mg}{k}}}$.

Rörelseekvationen, kraftekvationen för hela systemet, fås om de två kraftekvationerna för partiklarna adderas. Alternativt tidsderiveras energiekvationen (2):

$$\frac{1}{2}m\cdot 2\dot{x}\,\ddot{x} + \frac{1}{2}M\cdot 2\dot{x}\,\ddot{x} - Mg\dot{x} + \frac{1}{2}k\cdot 2x\,\dot{x} = 0 \tag{3}$$

vilket betyder att

$$\left(M+m\right)\ddot{x} + k\,x = Mg \tag{4}$$

Svängningsekvationen på standardform blir

$$\ddot{x} + \frac{k}{M+m}x = \frac{Mg}{M+m} \tag{5}$$

Jämförelse med teorins standardekvation $\ddot{x} + \omega_n^{\,2}\,x = \text{konstant}$

ger svängningstiden $\tau_n = \dfrac{2\pi}{\omega_n} = \underline{\underline{2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}}}$

Vi ser att båda kropparna bidrar till trögheten. Svängningsekvationen säger att accelerationen är noll för "mittenläget" $x_1 = Mg/k$.