KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN
INSTITUTIONEN FÖR MEKANIK
Richard Hsieh

Medt – 14 06 04

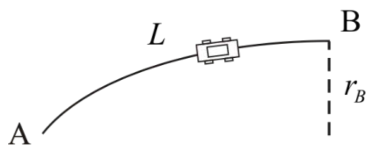
Tentamen i **SG1102 Mekanik, mindre kurs** för Medt

Uppgifterna skall lämnas in på separata papper.
För varje uppgift ges högst 3 poäng. För varje del fordras minst 4 poäng för godkänt.

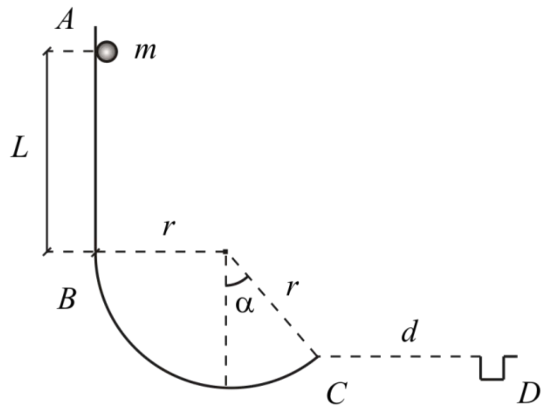
Skrivtid: 4 timmar.

Lycka till!

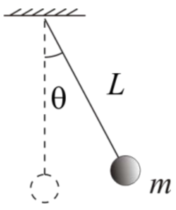
Problemdelen



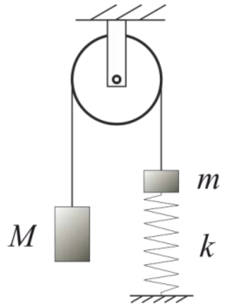
1. En bil startar från vila i punkt *A* på en horisontell, krökt bana och accelererar med en konstant tangentialacceleration a_o. Banans krökningsradie i *B* är r_B.
a) Bestäm bilens fart i punkt B då den har färdats sträckan *L*. (2 p)
b) Bestäm beloppet av bilens acceleration i *B*. (1 p)



2. En partikel med massan *m* släpps utan hastighet från en punkt *A* på höjden *L* rakt ovanför punkten *B*. Partikeln rör sig först på en glatt vertikal bana från punkt *A* till *B*, därefter från punkt *B* till *C* på en glatt cirkelbana med radien *r* som befinner sig i ett vertikalplan. I punkten *C* då vinkeln mellan radien och vertikalen är α lämnar partikeln banan. Ett hål i punkt *D* finns på ett horisontellt avstånd *d* från punkt *C*.
Från vilken höjd *L* ovanför punkt *B* måste partikeln släppas för att hamna i hålet? (3 p)



3. En partikelpendel bestående av en partikel med massan *m* fäst i en tråd med längden *L* rör sig fram och tillbaka i ett vertikalplan med ett maxutslag α. Bestäm spännkraften i tråden i vändläget då $\theta = \alpha$ och i pendelns nedersta läge. (3 p)



4. En lätt och lättrörlig trissa är upphängd på en fix horisontell axel. I en lätt, otänjbar tråd, som är lindad kring trissan, hänger två partiklar med massorna *m* och *M*. En fjäder med fjäder-konstanten *k* sitter fast i den ena partikeln och i golvet.
Bestäm perioden för systemets svängningar kring jämviktsläget. (3 p)

KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN
INSTITUTIONEN FÖR MEKANIK
Richard Hsieh

Medt – 14 06 04

Teoridelen

5. En punkt rör sig längs banan $\boldsymbol{r}(t) = b\cos\omega t\,\boldsymbol{e}_x + b\sin\omega t\,\boldsymbol{e}_y$ där b och ω är konstanter.
   a) Bestäm hastigheten $\boldsymbol{v}$ och visa att v = konstant. (1 p)
   b) Bestäm accelerationen $\boldsymbol{a}$ och visa att $\boldsymbol{a}$ är parallell med $\boldsymbol{r}$. (1 p)
   c) Visa att accelerationen är vinkelrät mot hastigheten. (1 p)

6. Ortsvektorn $\mathbf{r}_{op}$ för en partikel P beskriver en bankurva i rummet.

a) Rita $\mathbf{r}_{op}$ och enhetsvektorerna $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ och $\mathbf{e}_z$ som följer P. Dela upp $\mathbf{r}_{op}$ i figuren i en komposant i xy-planet och en komposant längs z-axeln. (1 p)
b) Härled uttrycket för hastigheten i cylinderkoordinater. (1 p)
c) Härled uttrycket för accelerationen i cylinderkoordinater. (1 p)

Tidsderivatorna av enhetsvektorerna $\mathbf{e}_r$ och $\mathbf{e}_\theta$ måste härledas.

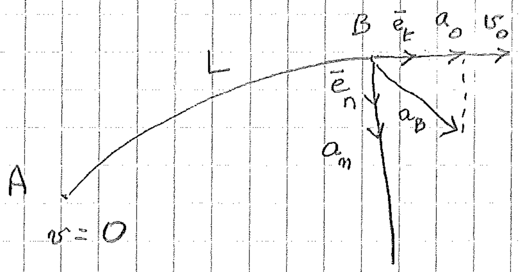
7. a) Formulera kraftekvationen för ett partikelsystem. Alla införda storheter måste definieras. (1 p)
   b) Utgående från kraftekvationen för en partikel (NII), härled formeln i a). (2 p)

8. a) Definiera rörelsemängdsmomentet $\mathbf{H}_A$ och kraftmomentet $\mathbf{M}_A$ för en partikel, och bevisa momentekvationen $\dot{\boldsymbol{H}}_A = \mathbf{M}_A$ där A är en fix punkt. (1 p)
   b) Visa att när en partikel rör sig i ett centralkraftfält så är rörelsemängdsmomentet med avseende på kraftcentrum konstant och rörelsen plan. (2 p)

Glöm inte att ange alla vektorstorheter med vektorstreck.

Tentamen i SG1102 Mekanik, mindre kurs för Cmedt – 140604

①



a) Kinematiken i naturliga komponenter

$$\bar{e}_t : \quad \frac{dv}{dt} = a_0 \quad \text{alla } s \qquad (1)$$

Uttryck $v = v(s) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} v \qquad (2)$

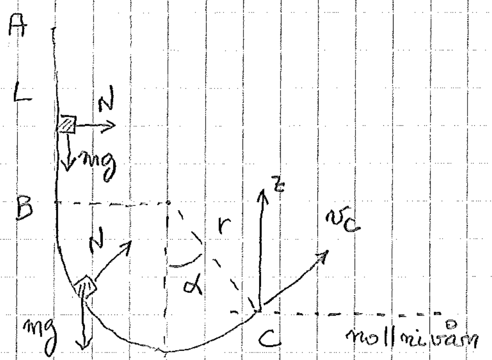
(2) i (1) ger $v\,dv = a_0\,ds$

$$\int_0^{v_B} v\,dv = \int_0^L a_0\,ds \Rightarrow \underline{\underline{v_B = \sqrt{2a_0L}}} \qquad (3)$$

b) $a_B = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{a_0^2 + \left(\frac{v_B^2}{r_B}\right)^2} \qquad (4)$

(3) i (4) ger $\underline{\underline{a_B = a_0\sqrt{1 + \frac{4L^2}{r_B^2}}}}$

②



$T + V = \text{konst} \quad V = mgz$

I A och C : $mg(L + r\cos\alpha) = \frac{mv_C^2}{2}$

$$\Rightarrow L = \frac{v_C^2}{2g} - r\cos\alpha \qquad (1)$$

Efter C beskriver partikeln en kaströrelse.

NII i kartesiska koordinater

$m\ddot{x} = 0$ och $m\ddot{z} = -mg$

$$\Rightarrow x(t) = v_C\cos\alpha \cdot t \quad \text{och} \quad z(t) = t\left(v_C\sin\alpha - g\frac{t}{2}\right) \qquad (2)$$

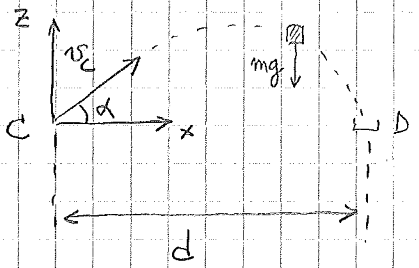
Vid t_D gäller $x(t_D) = d$ och $z(t_D) = 0$.

Insättning i (2) ger

$$t_D = \frac{2v_C\sin\alpha}{g} \quad \text{och} \quad v_C^2 = \frac{dg}{\sin 2\alpha}$$

Insättning i (1) ger

$$\underline{\underline{L = \frac{d}{2\sin 2\alpha} - r\cos\alpha}}$$



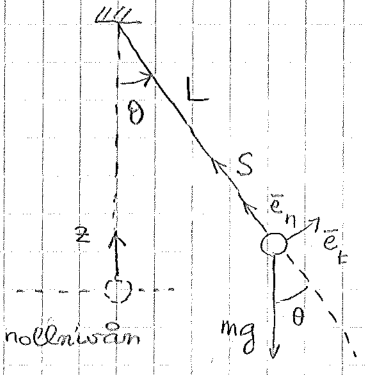
BV

$x(0) = 0 \quad z(0) = 0$

$\dot{x}(0) = v_C\cos\alpha \quad \dot{z}(0) = v_C\sin\alpha$

RH 1(3)

(3)



NII på partikeln i naturliga komponenter

$$\bar{e}_n: \quad \frac{mv^2}{L} = -mg\cos\theta + S \qquad -\alpha \leq \theta \leq +\alpha$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{mv^2}{L} + mg\cos\theta \qquad (1)$$

I vändläget är $\theta = \alpha$ och $v = 0$. (1) ger

$$\underline{\underline{S_\alpha = mg\cos\alpha}}$$

I nedersta läget är $\theta = 0$. (1) ger

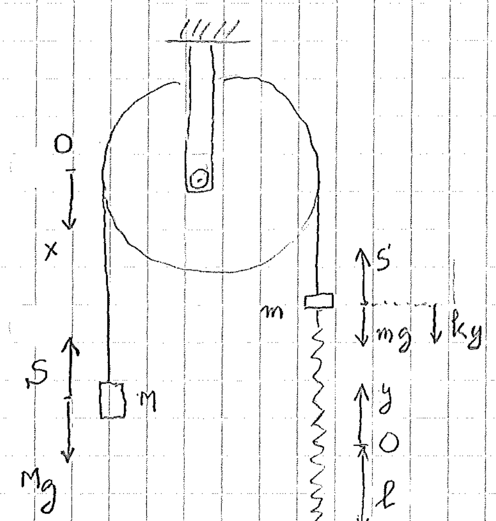
$$S_0 = \frac{mv_0^2}{L} + mg \qquad (2)$$

$T + V = \text{konst} \quad V = mgz$ ger

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgL(1-\cos\alpha) \Rightarrow v_0^2 = 2gL(1-\cos\alpha) \qquad (3)$$

(3) i (2) ger $\underline{\underline{S_0 = mg(3 - 2\cos\alpha)}}$

(4)



Inför axlarna x och y

NII på M

$$\bar{e}_x: \quad M\ddot{x} = -S + Mg \qquad (1)$$

NII på m

$$\bar{e}_y: \quad m\ddot{y} = S - mg - ky \qquad (2)$$

Tråden är otänjbar $\quad \ddot{x} = \ddot{y} \qquad (3)$

(1) + (2) och (3) ger

$$\ddot{y} + \frac{k}{m+M}y = \frac{(M-m)}{(M+m)}g$$

Inför $\omega_n^2 = \dfrac{k}{m+M}$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{T = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}}}}$$

5 a) $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = -b\omega \sin \omega t \, \bar{e}_x + b\omega \cos \omega t \, \bar{e}_y$

$v = \sqrt{b^2 \omega^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} = |b| \, |\omega| = \text{konst}$

b) $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = -\omega^2 (b \cos \omega t \, \bar{e}_x + b \sin \omega t \, \bar{e}_y)$

$\bar{a} = -\omega^2 \bar{r} \Rightarrow \bar{a} \parallel \bar{r}$

$a = |b| \omega^2$

c) $\bar{a} \cdot \bar{v} = 0 \quad a \neq 0 \quad v \neq 0 \Rightarrow \bar{a} \perp \bar{v}$

6 Se boken

7 Se boken

8 Se boken