KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN
INSTITUTIONEN FÖR MEKANIK
Richard Hsieh

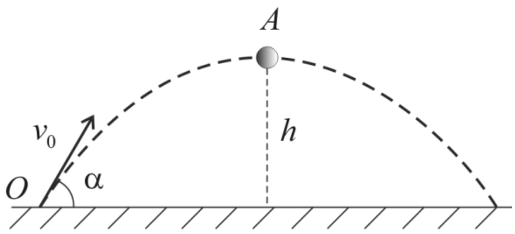
Med – 15 06 01

Tentamen i **SG1102 Mekanik, mindre kurs** för Cmedt

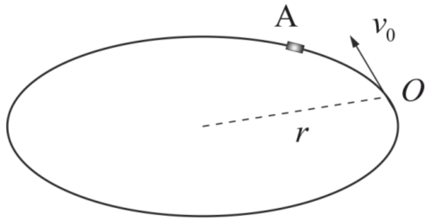
Uppgifterna skall lämnas in på separata papper.
För varje uppgift ges högst 3 poäng. För varje del fordras minst 4 poäng för godkänt.
Skrivtid: 4 timmar.

Lycka till!

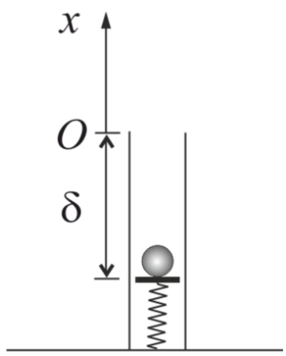
Problemdelen



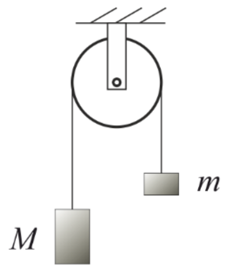
1. En partikel kastas med en elevationsvinkel α och en utgångsfart v_0 från punkten *O* på marken.
a) Bestäm den tid det tar för partikeln för att nå sin högsta punkt *A*. (1 p)
b) Bestäm partikelns högsta höjd *h* ovanför marken. (1 p)
c) Bestäm krökningsradien för partikelns bana i punkten *A*. (1 p)



2. En hylsa med massan *m* som glider längs en glatt metallring med radien *r* har hastigheten $\mathbf{v}_0$ i punkten *O*. Metallringen ligger i ett horisontalplan. Bestäm normalkraften **N** i punkten *A*, dess riktning och belopp. (3 p)



3. En partikel med massan *m* ligger på en lätt, glatt skiva som är fastsatt i ena änden av en vertikal fjäder med fjäderkonstanten *k* och naturliga längden ℓ. Fjäderns andra ände är fäst vid en bordsyta. Skivan pressas ned och partikeln hålls i vila. Fjäderns hoptryckning från sin naturliga längd är då δ, se figur. Systemet släpps sedan vilket får partikeln att röra sig uppåt över *O*.
a) Visa att partikeln lämnar skivan vid punkten *O*. (1 p)
b) Bestäm partikelns hastighet då den lämnar skivan. (1 p)
c) Bestäm partikelns högsta höjd över bordsytan. (1 p)



4. En lätt och lättrörlig trissa är upphängd på en fix horisontell axel. I en lätt, otänjbar tråd, som är lindad kring trissan, hänger två partiklar med massorna *m* och *M* (*M* > *m*).
Bestäm reaktionskraften **R** från axeln på trissan. (3 p)

KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN
INSTITUTIONEN FÖR MEKANIK
Richard Hsieh

Med – 15 06 01

Teoridelen

5. a) Rita en figur i vilken båglängden s och enhetsvektorerna $\mathbf{e}_t$, $\mathbf{e}_n$ och $\mathbf{e}_b$ för naturliga komponenter framgår. (1 p)
   b) Härled uttrycket för hastigheten i naturliga komponenter. (1 p)
   c) Härled uttrycket för accelerationen i naturliga komponenter. Tidsderivatan av enhetsvektorn $\mathbf{e}_t$ måste härledas. (1 p)

6. a) Definiera partikelns rörelsemängd $\boldsymbol{p}$. (1 p)
   b) Formulera Newtons 2:a lag / rörelsemängdslagen för en partikel. (1 p)
   c) Definiera vad som menas med icke-inertialsystem. Ange ett exempel. (1 p)

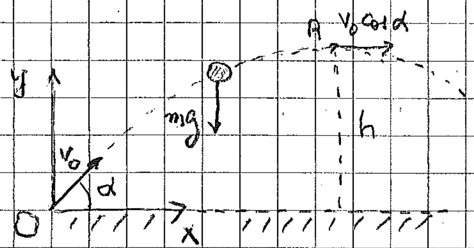
7. a) Definiera den potentiella energin $V(\mathbf{r})$ för en konservativ kraft. (1 p)
   b) En partikel är rörlig i ett plan och har lägesvektorn $\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r$ där $\mathbf{e}_r$ är radiella basvektorn i cylinderkoordinater. Partikeln påverkas av fjäderkraften $\mathbf{F} = -k(r - \ell)\,\mathbf{e}_r$ där k är fjäderkonstanten och ℓ fjäderns naturliga längd.
   Visa att fjäderkraften är konservativ och beräkna $V(\mathbf{r})$. Observera att partikeln är rörlig i ett plan och inte bara längs en rät linje. (2 p)

8. Härled stötimpulslagen för en partikel. (3 p)

Glöm inte att ange alla vektorstorheter med vektorstreck.

Tentamen i SG1102 Mekanik, mindre kurs för Cmedt - 150601

(1)



NII ger för partikeln

$\uparrow \quad m\ddot{y} = -mg \qquad (1)$

$\rightarrow \quad m\ddot{x} = 0 \qquad (2)$

(1) ger $\dot{y}(t) = v_0\sin\alpha - gt$ och $y(t) = v_0\sin\alpha\, t - g\frac{t^2}{2}$

(2) ger $\dot{x}(t) = v_0\cos\alpha$

a) Vid t_A är $\dot{y}(t_A) = 0 \Rightarrow t_A = \underline{\underline{\dfrac{v_0\sin\alpha}{g}}}$

b) Vid t_A är $y(t_A) = h \Rightarrow h = \underline{\underline{\dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}}}$

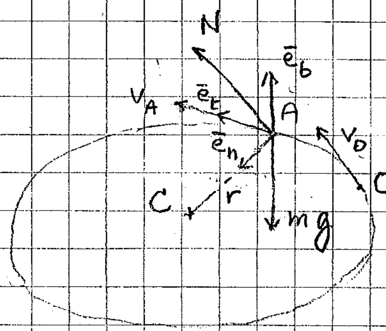
c) Krökningsradien för partikelns bana i punkten A ges av

$\rho = \dfrac{v^2}{a_n}$

Men $v = v_0\cos\alpha$ och $a_n = g$.

Detta ger $\rho = \underline{\underline{\dfrac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}}}$

(2)



Normalkraften $\bar{N}$ i punkten A ges av

$\bar{N} = N_n\bar{e}_n + N_b\bar{e}_b$

$N = \sqrt{N_n^2 + N_b^2}$

NII ger

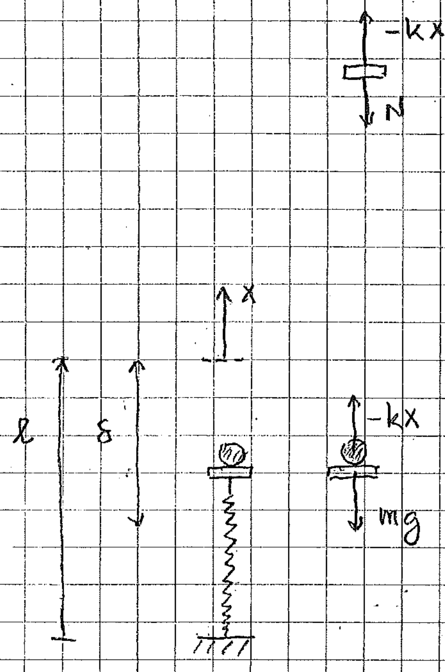
$N_n = \dfrac{m v_A^2}{r}$ och $N_b = mg$

Glatt metallring medför att $v_A = v_0$.

$\underline{\underline{\bar{N} = \dfrac{m v_0^2}{r}\bar{e}_n + mg\,\bar{e}_b}}$

$\underline{\underline{N = m\sqrt{\dfrac{v_0^4}{r^2} + g^2}}}$

(3)



a) N II ger för skivan

$\uparrow \; -N - kx = 0 \Rightarrow N = -kx$

Kontaktvillkoret $N \geq 0$ ger att partikeln tappar kontakten vid $x = 0$.

b) $T + V = E$ på partikeln + skivan

där $V = mgx + \frac{kx^2}{2} + C$ ger

$$\frac{mv_0^2}{2} = mg(-\delta) + \frac{k}{2}(-\delta)^2$$

$$\Rightarrow v_0 = \boxed{\sqrt{\delta\left(\frac{k}{m}\delta - 2g\right)}}$$

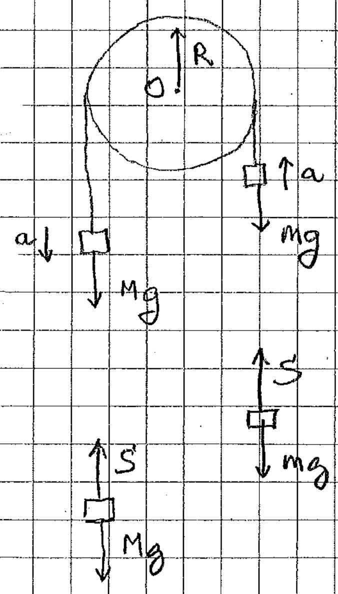
c) $T + V = E$ på partikeln

där $V = mgx + C_1$ ger

$$mgd = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow d = \left(\frac{k\delta}{2mg} - 1\right)\delta$$

Den sökta höjden ges av $\underline{\underline{\ell - \delta + \frac{k\delta^2}{2mg}}}$

(4)



$(M > m)$

Trissan är lätt och lättrörlig $S_m = S_M = S$

Tråden är otänjbar $a_m = a_M = a$

Kraftekvationen ger för hela systemet

$\downarrow \; (M+m)g - R = (M-m)a$ (1)

N II ger för M och m

$\downarrow \; Ma = Mg - S$

$\uparrow \; ma = S - mg$

Dessa två ekvationer leder till $a = \frac{(M-m)}{M+m}g$

Insättning i (1) ger $R = \underline{\underline{\frac{4Mm}{M+m}g}}$

(5) - (8) se boken