KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN
INSTITUTIONEN FÖR MEKANIK
Richard Hsieh

Med – 16 05 31

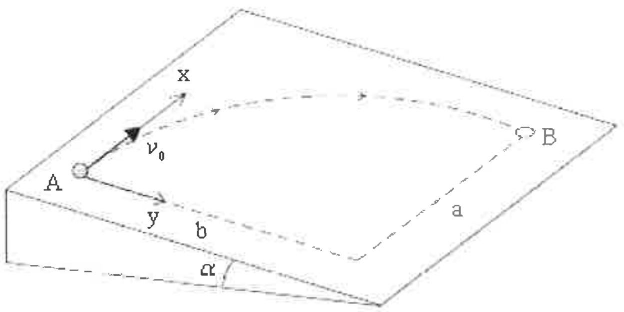
Tentamen i **SG1102 Mekanik, mindre kurs** för Cmedt

Uppgifterna skall lämnas in på separata papper.
Problemdelen. För varje uppgift ges högst 6 poäng. För godkänt fordras minst 8 poäng.
Teoridelen. För varje uppgift ges högst 4 poäng. För godkänt fordras minst 7 poäng.

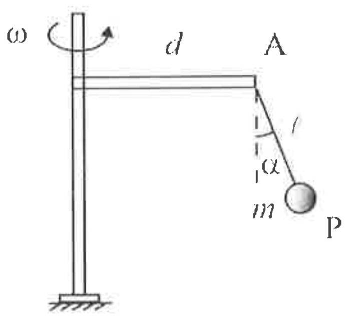
Skrivtid: 4 timmar.

Lycka till!

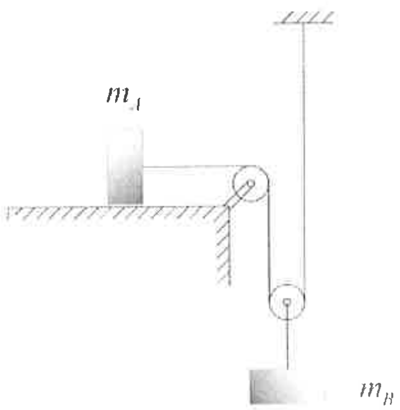
Problemdelen



1. En partikel med massan m kan glida på ett glatt lutande plan med lutningsvinkeln α. Partikeln ges i ett visst ögonblick i en punkt A på planet hastigheten $\boldsymbol{v}_0$ som är parallell med den övre kanten.
a) Bestäm som funktion av tiden partikelns läge $\boldsymbol{r}(t)$. (4 p)
b) Hur stor ska farten v_0 vara för att partikeln skall hamna i hålet B enligt figuren med de givna avstånden a och b. (2 p)

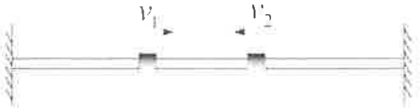


2. En partikel P med massan m är upphängd i en lina. Linan har längden ℓ och vinkeln α till en vertikal axel. Linans upphängningspunkt A finns på en stång som är vinkelrät mot en fix vertikal axel. Dess vinkelräta avstånd till den fixa axeln är d. Hela systemet roterar med en konstant vinkelhastighet ω. Se figur.
Inför ett koordinatsystem och bestäm komponenterna av partikelns hastighet $\boldsymbol{v}$, acceleration $\boldsymbol{a}$ och spännkraften $\boldsymbol{S}$ i detta koordinatsystem. (6 p)



3. Två partiklar med massorna m_A och m_B är förenade enligt figuren. Partikeln B rör sig vertikalt och partikeln A rör sig på ett glatt horisontellt spår. Trissorna är lätta och lättrörliga. Bestäm farten hos partikeln A då partikeln B, från vila har rört sig vertikalt nedåt en sträcka h. (6 p)

KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN
INSTITUTIONEN FÖR MEKANIK
Richard Hsieh



4. Två hylsor, vardera med massan m, kan glida på en glatt horisontell fix stång. Hastigheterna är från början motriktade med farten v_1 för den vänstra hylsan (1) och v_2 för den högra hylsan (2). Bestäm hastigheterna efter stöt om studstalet är e = 1. (6 p)

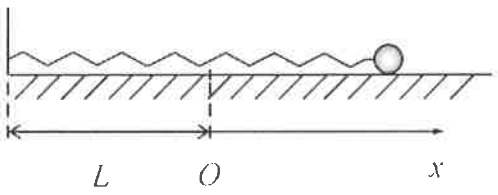
Teoridelen

5. Ortsvektorn $\mathbf{r}_{op}$ för en partikel P beskriver en bankurva i rummet.

a) Rita $\mathbf{r}_{op}$ och enhetsvektorerna $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ och $\mathbf{e}_z$ som följer P. Dela upp $\mathbf{r}_{op}$ i figuren i en komposant i xy-planet och en komposant längs z-axeln. (1 p)

b) Härled tidsderivatorna av enhetsvektorerna $\mathbf{e}_r$ och $\mathbf{e}_\theta$. (1 p)
c) Härled uttrycket för hastigheten i cylinderkoordinater. (1 p)
d) Härled uttrycket för accelerationen i cylinderkoordinater. (1 p)

6. a) Definiera partikelns rörelsemängd. (1 p)
b) Formulera Newtons första lag NI. Alla införda storheter måste definieras. (1 p)
c) Formulera Newtons andra lag NII (rörelsemängdslagen för en partikel). Alla införda storheter måste definieras. (1 p)
d) Formulera Newtons tredje lag NIII. Alla införda storheter måste definieras. Ange ett exempel. (1 p)



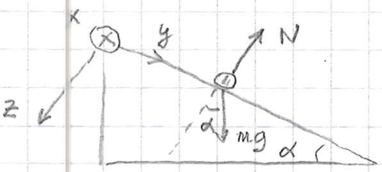
7. En partikel med massan m är fastsatt i ena änden av en lätt fjäder med fjärderkonstanten k och naturliga längden L. Fjäderns andra ände är fix. Inför en x-axel. Se figuren.
a) Definiera den potentiella energin för en konservativ kraft. (1 p)
b) Bestäm den potentiella energin för fjäderkraften. (1 p)
c) Formulera lagen om den mekaniska energin för en partikel (energiekvationen). Alla införda storheter måste definieras. (1 p)
d) Vid jämvikt tilldelas partikeln en hastighet så att partikeln rör sig på ett glatt horisontellt underlag.Tillämpa formeln i c) och härled svängningsekvationen för partikeln. (1 p)

8. a) Definiera rörelsemängdsmomentet $\mathbf{H}_A$ för en partikel. (1 p)
b) Härled uttrycket för rörelsemängdsmomentet H_O för ett partikelsystem med avseende på en fix axel z. O är en punkt på z-axeln. (1 p)
c) Definiera tröghetsmomentet I_z med avseende på z-axeln för ett partikelsystem. (1 p)
d) Utgående från momentekvationen med avseende på en fix punkt för en partikel, härled momentekvationen med avseende på en fix axel z för ett partikelsystem. (1 p)

Glöm inte att ange alla vektorstorheter med vektorstreck.

Tentamen i SG1102 Mekanik, mindre kurs för Cmedt - 160531

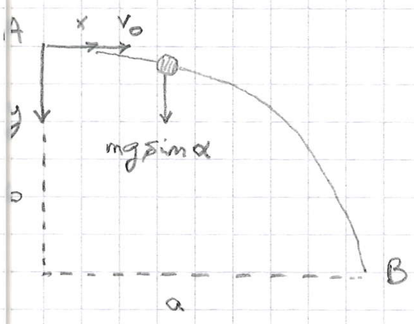
(1)



a) NII på partikeln i kartesiska koordinater

$\bar{e}_z : \quad -N + mg\cos\alpha = m\ddot{z} = 0$

$\Rightarrow N = mg\cos\alpha$



b) I xy-planet

$\bar{e}_x : \quad m\ddot{x} = 0 \Rightarrow x(t) = \underline{\underline{v_0 t}}$

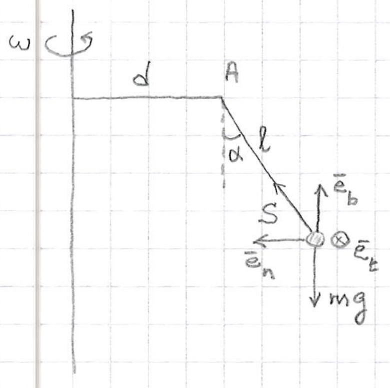
$\bar{e}_y : \quad m\ddot{y} = mg\sin\alpha \Rightarrow y(t) = \underline{\underline{g\sin\alpha \frac{t^2}{2}}}$

Vid t_1 i B gäller $x_B(t_1) = a$ och $y(t_1) = b$.

$v_0 t_1 = a$ och t_1 ur $g\sin\alpha \frac{t_1^2}{2} = b$ ger

$v_0 = \underline{\underline{a\sqrt{\frac{g\sin\alpha}{2b}}}}$

(2)



Inför $\bar{e}_t, \bar{e}_n, \bar{e}_b$. $\bar{v} = v_t \bar{e}_t$

$v_t = (d + l\sin\alpha)\omega = \text{konst}$

$v_n = 0$ och $v_b = 0$

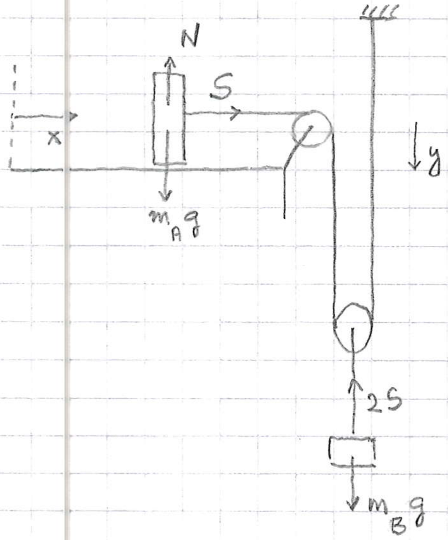
$a_t = \frac{dv_t}{dt} = 0 \qquad a_n = (d + l\sin\alpha)\omega^2 \qquad a_b \equiv 0$

NII ger $\bar{S} + m\bar{g} = m\bar{a} \Rightarrow \bar{S} = m\bar{a} - m\bar{g}$

Detta ger

$\underline{\underline{S_t = 0}} \qquad \underline{\underline{S_n = m(d + l\sin\alpha)\omega^2}} \qquad \underline{\underline{S_b = mg}}$

(3)



Inför axlarna x och y.

LKE på m_A, resp. m_B ger

$$\frac{m_A v_A^2}{2} - 0 = \int_0^{2h} S\,dx \qquad (1)$$

$$\frac{m_B v_B^2}{2} - 0 = -2\int_0^{h} S\,dy + m_B g h \qquad (2)$$

Addera energiekvationerna (1) och (2).

Summan av trådkraftens arbete är noll.

$$m_A \frac{v_A^2}{2} + m_B \frac{v_B^2}{2} = m_B g h \qquad (3)$$

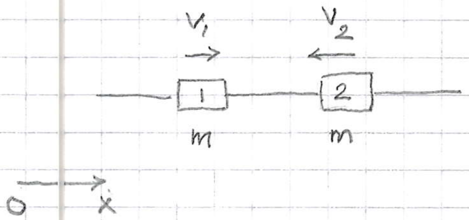
Tråden är otänjbar vilket ger

$$v_B = \frac{v_A}{2} \qquad (4)$$

Insättning av (4) i (3)

$$\underline{\underline{v_A = \sqrt{\frac{8 m_B g h}{4 m_A + m_B}}}}$$

(4)



Systemets rörelsemängd bevaras

$$\rightarrow \quad m v'_{1x} + m v'_{2x} = m v_1 - m v_2$$

$$\Rightarrow \quad v'_{1x} + v'_{2x} = v_1 - v_2 \qquad (1)$$

Studstalets definition och e = 1 ger

$$e = \frac{v'_{2x} - v'_{1x}}{v_{1x} - v_{2x}} = \frac{v'_{2x} - v'_{1x}}{v_1 - (-v_2)} = 1$$

$$\Rightarrow \quad v'_{2x} - v'_{1x} = v_1 + v_2 \qquad (2)$$

(1) + (2) ger $\underline{\underline{v'_{2x} = v_1}}$

(1) − (2) ger $\underline{\underline{v'_{1x} = -v_2}}$

5 - 8 se boken

7

d) Lagen om den mekaniska energin ger

$$m\frac{\dot{x}^2}{2} + kx^2 = \text{konst}$$

Tidsderivera:

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$