KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN 16 08 16
INSTITUTIONEN FÖR MEKANIK
Richard Hsieh, Karl-Erik Thylwe

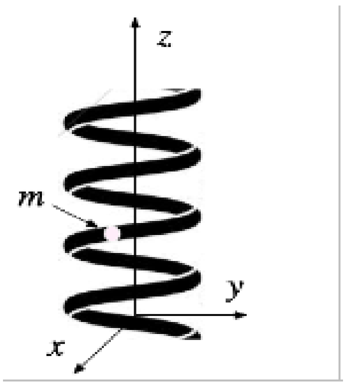
Tentamen i **SG1102 Mekanik, mindre kurs** för Bio, Cmedt, Open

Uppgifterna skall lämnas in på separata papper.
Problemdelen. För varje uppgift ges högst 6 poäng. För godkänt fordras minst 8 poäng.
Teoridelen. För varje uppgift ges högst 4 poäng. För godkänt fordras minst 7 poäng.

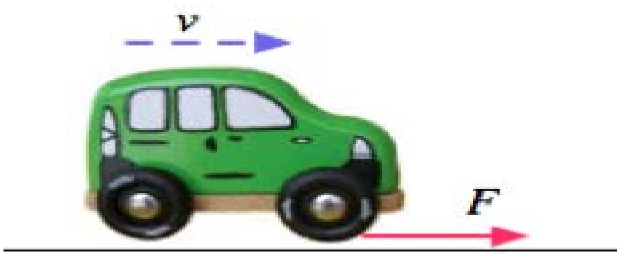
Skrivtid: 4 timmar.

Lycka till!

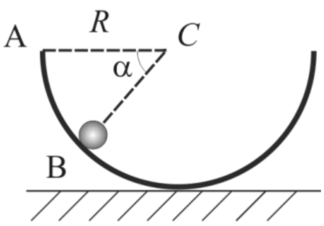
Problemdelen



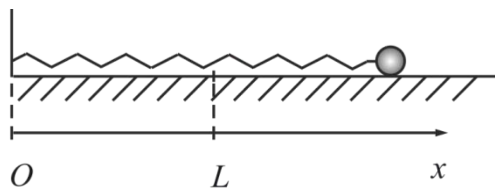
1. En partikel med massa *m* rör sig i ett regelbundet spiralformat rör med en rak symmetriaxel (*z*-axel) genom spiralen. Partikelns avstånd till symmetriaxeln är konstant lika med *b*. Spiralens *z*-koordinat beror av cylinderkoordinaten θ, så att $z = k\theta + z_0$, där *k* och z_0 är konstanter. Antag att farten i partikelrörelsen är konstant *v*.
a) Bestäm för ett godtyckligt läge ett uttryck för tangentvektorn om partikeln rör sig uppåt. (4 p)
b) Bestäm för samma rörelse partikelns acceleration. (2p)
Tyngdaccelerationen *g* på jordens är känd.



2. En bil med massan *m* accelereras från vila med <u>konstant effekt *P*</u> (för den drivande kraften) under tiden *T*. Rörelsen är rak och horisontell, luftmotstånd är försumbart.
a) Bestäm det arbete under tidsintervallet *T* som accelerationen kräver. (3 p)
b) Bestäm den fart bilen uppnår precis efter accelerationen. (2p)
c) Bestäm (driv-)kraften vid sluttiden *T*. (1p)
Tyngdaccelerationen *g* är känd men *v* och *F* i figuren är inte kända.



3. En partikel med massan *m* kan röra sig längs med en fix glatt halvcirkel med radien *R* i ett vertikalplan. Hur stor är den normalkraft som påverkar banan i punkten *B*, se figur, om partikeln släpps från *A*, på samma nivå som *C* och vinkeln α är känd? (6 p)
Tyngdaccelerationen *g* är känd.



4. En partikel med massan 3*m* är fastsatt i ena änden av en lätt rak fjäder med fjäderkonstanten *k* och naturliga längden *L*. Fjäderns andra ände är fix. Se figuren. Vid jämviktsläget när fjädern har sin naturliga längd tilldelas partikeln en hastighet v_0 i *x*-axelns riktning så att partikeln påbörjar en svängningsrörelse.

a) Bestäm svängningsekvationen. (2 p)

b) Bestäm perioden för partikelns svängningar kring jämviktsläget. (2 p)

c) Bestäm den tid det tar för partikeln att återkomma till jämviktsläget. (2 p)

Teoridelen

5. Välj <u>ett</u> korrekt alternativ på frågorna 5.1) – 5.4) och redovisa på separat svarsblad! Varje rätt svar ger 1 poäng.

5.1) För <u>en</u> partikels rörelse finns ett antal lagar som kan användas för att förutsäga mekaniska frågeställningar; om energier, lägen, krafter …? Hur många <u>oberoende</u> matematiska ekvationer bland de mekaniska lagarna finns att tillgå?

(a) 6 **(b)** 5 **(c)** 4 **(d)** 3 **(e)** 2 **(f)** 1

5.2) Vilken lägevektor beskriver en <u>likformig</u> cirkelrörelse som funktion av tiden? Ledning: *k*, *l*, ω och *R* är konstanter, medan *x* och θ är ospecificerade funktioner av tiden *t*.

(a) $\mathbf{r}(t) = R\omega\mathbf{e}_\theta$

(b) $\mathbf{r}(t) = kx + l$

(c) $\mathbf{r}(t) = R(\cos\omega t, \sin\omega t, t)$

(d) $\mathbf{r}(t) = R(\cos\theta, \sin\theta, l)\mathbf{e}_x$

(e) $\mathbf{r}(t) = (kx + l)\mathbf{e}_x$

(f) $\mathbf{r}(t) = R(l, \cos\omega t, \sin\omega t)$

5.3) För en partikels likformiga cirkelrörelse gäller alltid att:

(a) rörelsemängden är konstant

(b) hastigheten är konstant

(c) totala kraften på partikeln är konstant

(d) rörelsemängdsmomentet med avseende på någon fix punkt är konstant

(e) accelerationen är konstant

(f) impulsen är konstant

5.4) För en partikels kaströrelse gäller alltid att:

(a) rörelsemängden är konstant

(b) hastigheten är konstant

(c) rörelsemängdsmomentet avseende på någon fix punkt är konstant

(d) läget är konstant

(e) totala kraften på partikeln är konstant

(f) rörelseenergin är konstant

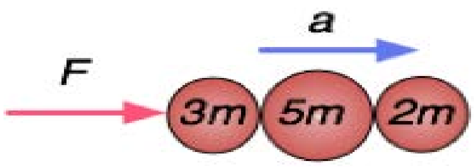
6. Välj <u>ett</u> korrekt alternativ på frågorna 6.1) – 6.4) och redovisa på separat svarsblad! Varje rätt svar ger 1 poäng.

6.1) En rak fjäders kraft beskrivs av $\mathbf{F}_k = -k\Delta x\mathbf{e}_x$, där Δx är fjäderns förlängning, $\mathbf{e}_x$ dess riktning, och *k* är en konstant. Analys av konstantens dimension ger:

(a) MLT^2 **(b)** MT^{-2} **(c)** ML^2T^{-2} **(d)** LT^{-2} **(e)** MLT^{-2} **(f)** LT^2

6.2) En partikel kan påverkas av krafter, enligt Newtons lagar. I vardagslivet lär man ibland höra om s.k. 'krafter', som inte är fysikaliska krafter. T. ex. körskolans 'levande kraften' i samband med uppskattning av bromssträckor. Vilken annan s.k. 'kraft' på en partikel av alternativen nedan är ingen fysikalisk (verklig) kraft?
(a) trådkraft, **(b)** centrifugalkraft, **(c)** friktionskraft, **(d)** gravitationskraft, **(e)** fjäderkraft, **(f)** normalkraft

6.3) För en spänd, lätt och otänjbar tråd som förbinder två partikelmassor gäller att:
(a) tråden påverkar den snabbaste partikeln av de två med störst kraft
(b) tråden påverkar den snabbaste partikeln av de två med minst kraft
(c) tråden påverkar båda partiklarna med lika kraftvektorer
(d) tråden påverkar båda partiklarna med lika kraftparsmoment skilt från $\bar{\mathbf{0}}$
(e) tråden påverkar båda partiklarna med lika stora men motriktade kraftvektorer bara om partiklarna är i vila
(f) tråden påverkar båda partiklarna med lika stora men motriktade kraftvektorer



6.4)
En kraft F får tre massor att accelerera längs en rät linje. Hur stor är totala kraften på massan 5m?
(a) $F/3$ **(b)** $F/5$ **(c)** $F/2$ **(d)** F **(e)** $2F$ **(f)** $5F$

7. a) Definiera den potentiella energin $V(\mathbf{r})$ för en konservativ kraft. (1 p)
b) Visa att det arbete som en konservativ kraft uträttar vid förflyttning mellan två godtyckliga punkter är lika med ändringen av den potentiella energin mellan de två punkterna, d.v.s. $U_{1\text{-}2} = V_1 - V_2$. (1 p)
c) Utgå ifrån lagen om den kinetiska energin och uttrycket för arbetet för ett konservativt kraftfält och bevisa den mekaniska energilagen för en partikel, d.v.s. $T + V = E$. (1 p)
d) Välj ett exempel och ett läge för partikeln och bestäm den mekaniska energin E i c). (1 p)

8. En partikel P med massan m rör sig i rummet. Partikeln har hastigheten $\boldsymbol{v}$ och accelerationen $\boldsymbol{a}$. Inför en rörlig momentpunkt A.
a) Definiera $\boldsymbol{H}_A$, partikelns rörelsemängdsmoment med avseende på momentpunkten A. (1 p)
b) Definiera $\boldsymbol{M}_A$, partikelnskraftmoment med avseende på momentpunkten A. (1 p)
c) Gäller $\dot{\boldsymbol{H}}_A = \boldsymbol{M}_A$? Motivering krävs. (1 p)
d) Anta att momentpunkten A är fix. Gäller $\dot{\boldsymbol{H}}_A = \boldsymbol{M}_A$? Motivering krävs. (1 p)

Glöm inte att ange alla vektorstorheter med vektorstreck.

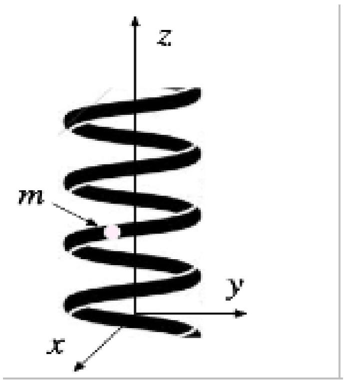
KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN
INSTITUTIONEN FÖR MEKANIK
Richard Hsieh, Karl-Erik Thylwe

16 08 16

Lösningar till **SG1102 Mekanik, mindre kurs** för Bio, Cmedt, Open

Problemdelen

1



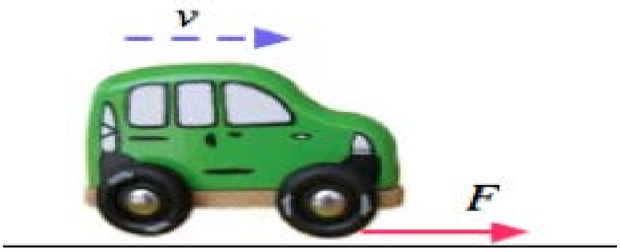
1. <u>Uttryck för tangentriktningen:</u> Med cylinderkomponenter beskrivs läget i spiralröret av: $\mathbf{r} = b\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z$, där $\mathbf{e}_r$ för ett godtyckligt läge beskrivs med *xyz*-komponenter av vektorn $\mathbf{e}_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$. Hastigheten ges av definitionen: $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = b\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + k\dot{\theta}\mathbf{e}_z$, med $\mathbf{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$ och $\mathbf{e}_z$ konstant. Nu kan den konstanta farten uttryckas som $v = \dot{\theta}\sqrt{b^2 + k^2}$. Vinkelhastigheten $\dot{\theta}$ är konstant, ty farten antas vara konstant. Rörelsens tangentriktning blir

$$\mathbf{e}_t = \frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{b\mathbf{e}_\theta + k\mathbf{e}_z}{\sqrt{b^2 + k^2}}, \text{ eller}$$

$$\boxed{\mathbf{e}_t = \frac{(-b\sin\theta, b\cos\theta, k)}{\sqrt{b^2 + k^2}}}.$$

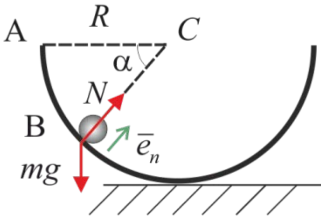
<u>Uttryck för accelerationen:</u> Med cylinderkomponenter fås accelerationen enligt definitionen: $\boxed{\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = -b\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r}$.

2



2. **a)** Det arbete *U* som tillförs under tiden *T* med konstant effekt *P* är *U* = *PT*.
b) Arbetet blir bara rörelseenergi så att $PT = \frac{m}{2}v^2$. D.v.s. farten blir $\boxed{v = \sqrt{\frac{2PT}{m}}}$.
c) Vid accelerationens slut ges kraften ur definitionen av effekt: $F = \frac{P}{v}$. Och dess relation till accelarationstiden T blir $\boxed{F = \sqrt{\frac{mP}{2T}}}$.

3



3. NII i *B* ger

$$\mathbf{e}_n \quad N - mg\sin\alpha = \frac{mv^2}{R}$$

$$\rightarrow \quad N = mg\sin\alpha + \frac{mv^2}{R} \qquad (1)$$

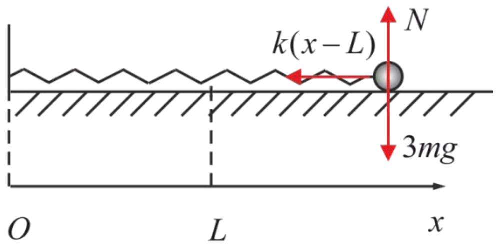
Lagen om den mekaniska energin *E* = *T* + *V* = konst i *B* och *A* ger

$$\frac{mv^2}{2} - mgR\sin\alpha = 0$$

$$\rightarrow \quad v^2 = 2gR\sin\alpha \qquad (2)$$

Insättning av (2) i (1) ger $N = 3mg\sin\alpha$

4



4. a) NII på $3m$ ger

$\mathbf{e}_x$ $3m\,\ddot{x} = -k(x-L)$

Svängningsekvationen ges av

$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 L$ där $\omega_n^2 = \frac{k}{3m}$

b) Perioden ges av $T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{k}}$

c) Den sökta tiden t ges av

$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{3m}{k}}$

Teoridelen

5.1 **(d)**
5.2 **(f)**
5.3 **(d)**
5.4 **(e)**

6.1 **(b)**
6.2 **(b)**
6.3 **(f)**
6.4 **(c)**

7. a) – c). Se boken.
d). Se skrivningen.

8. a) – b). Se boken.
c) $\dot{\boldsymbol{H}}_A = \boldsymbol{M}_A$ gäller inte. $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ är inte parallell med $m\boldsymbol{v}$.
d) $\dot{\boldsymbol{H}}_A = \boldsymbol{M}_A$ gäller. Se boken.