Kungliga Tekniska Högskolan
SG1108 Tillämpad fysik – Mekanik

2010-03-03

En djupdykning i

Skydiving

Projekt i Mekanik

Kursansvarig: Richard Hsieh

Nathalie Sahlström 890804-0143
Emelie Holm 900723-0049
Sofie Sjödahl 900904-3705

CMIEL09

Sammanfattning

Målet med projektet har varit att matematiskt modellera de fysikaliska krafterna vid ett fallskärmshopp och illustrera vad som händer vid de olika tidpunkterna i hoppet och varför.

Förloppet har delats upp i ett antal delar som undersöktes för sig

- När man hoppat ut ur planet och faller fritt, med och utan luftmotstånd
- När man fäller ut fallskärmen
- När man fortsätter falla med fallskärmen
- När man landar på marken

För att få fram matematiska modeller har informationskällor så som internet och litteratur använts. Typiska värden på de inspelande parametrarna har sedan använts i formlerna för att söka reda på de nödvändiga siffrorna till modellen. Detta har krävt en del generalisering, då t.ex fallskärmar kan se mycket olika ut.

	Maxhastighet (m/s)	Maxhastighet (km/h)
Fritt fall utan luftmotstånd	∞	∞
Fritt fall med luftmotstånd	66,9	240,0
Fall med fallskärm	13,0	46,7

Opponentgrupp:

Kenji Kjellson (ordf)
Robert Gelotte (sekr)
Camilla Englund
Erik Heimbürger
Silvina Nale Buitron

Innehållsförteckning

Inledning

För att kunna räkna på mekaniken i ett fallskärmshopp är en förenkling av verkligheten att föredra. I verkligheten spelar nämligen många faktorer in som skulle göra formlerna mycket komplicerade. I modellen i det här projektet har vissa faktorer därför ”skalats bort”.

En komplicerad faktor är luftens densitet, som varierar med höjden över havet, vilket skulle behövas tas med i uträkningarna för luftmotståndet för att få en exakt bild, men det skulle bli för komplicerat. I stället har ett medelvärde av densiteten mellan hopphöjden och marken använts, vilket ändå ger en ungefärlig bild av förloppet.

Om man skulle vilja ha modellen väldigt exakt skulle man även behöva ta med vindar i beräkningen, men det är en hel vetenskap i sig som inte ingår i det här projektet och inte heller går att förutspå.

Med förenklingarna går nu detta att räkna på. Genom att sedan jämföra med verkligheten kan man se hur bra modellen stämmer överens och utvärdera svagheterna. Detta ska ske dels genom egna erfarenheter och dels från olika hemsidor från företag som sysslar med skydiving.

Frågeställningen har varit:

- fritt fall med och utan luftmotstånd, vilken maxhastighet kan man uppnå?
- vad blir det för någon skillnad vid fritt fall om vikt och area varierar?
- när måste man fälla ut fallskärmen vid olika hastigheter och höjder?
- hur stor blir kraften när fallskärmen fälls ut och hur skadligt kan det vara?

Modell

Luftmotståndet beräknas olika när det handlar om låg respektive hög hastighet. Skillnaden är att kraften är proportionell mot hastigheten vid låg hastighet, men proportionell mot hastigheten i kvadrat vid hög hastighet.

Eftersom att en fallande människa ganska snabbt kommer upp i hög hastighet så används formelns för hög hastighet i det här projektet.

Formel för luftmotstånd vid hög hastighet: $F = \frac{1}{2} \cdot p \cdot v^2 \cdot A \cdot C_d$ **(1)** [1]

Där

F är luftmotståndskraften
p är omgivningens densitet
v är hastigheten på föremålet
A är föremålets area
C_d är en dimensionslös motståndskoefficient som beror av formen på föremålet

För att testa formelns rimlighet har en dimensionsanalys gjorts på den. Först kollas parametrarnas dimensioner:

$$Dim(F) = MLT^{-2}$$
$$Dim(p) = ML^{-3}$$
$$Dim(v) = \left(LT^{-1}\right)^2$$
$$Dim(A) = L^2$$
$$Dim(C) = 1 \text{ (dimensionslös)}$$

Sedan sätts de in i formeln. Om högerledet stämmer med vänsterledet är formeln dimensionsenlig.

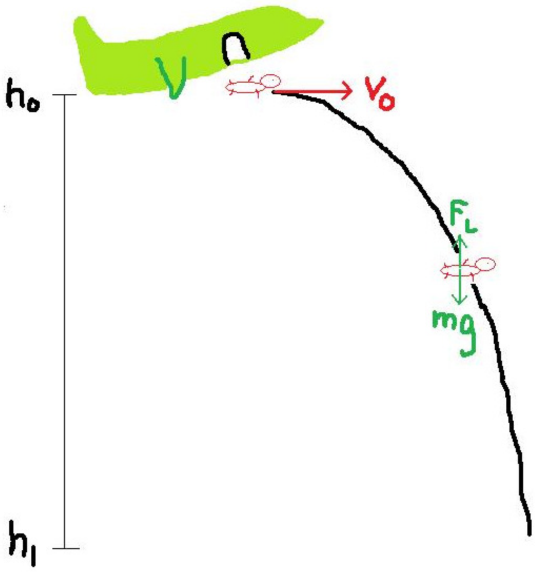
Högerled: MLT^{-2}
Vänsterled: $\left(ML^{-3}\right)\left(LT^{-1}\right)^2\left(L^2\right) = ML^{-3}L^2L^2T^{-2} = MLT^{-2}$

Detta innebär att formeln är dimensionsenlig och om man vill kan man kontrollera den ytterligare, som t.ex. att konstanten *k* verkligen är lika med ½, men här räcker det med att ha kollat dimensionerna.

[1] http://craig.backfire.ca/pages/autos/drag

Fritt Fall

Först undersöks det fria fallet direkt när man hoppat ut ur flygplanet. En jämförelse ska göras mellan hur det är med respektive utan hänsyn till luftmotståndet.



Figur 1

Utan luftmotstånd

Bakgrundsinformation:

Höjden av hoppet i skydiving brukar vara från 4000-5000m höjd och man behöver fälla ut fallskärmen på senast 700 m höjd[2]. Båda höjderna, och skillnaden mellan dem ska undersökas, då dessa är de vanligaste hopphöjderna hos företagen.

Formeln som kommer att användas är energiprincipen, där lägesenergin förvandlas till rörelseenergi.

$$E_p = mgh$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Vid 4000 meters höjd

Energin från början är endast lägesenergin:

$$E = E_p = mgh$$

Vid 700 m måste den totala energin vara densamma men har nu förvandlats till både läges- och rörelseenergi så att summan blir lika stor som E.

[2] www.skydive.se, rådfrågning via e-mail

H_0= 4000 m
H_1 = 700 m

$$E = E_p + E_k$$

$$E_k = E - E_p$$

$$\frac{mv^2}{2} = mgh_0 - mgh_1 = mg(h_0 - h_1)$$

$$v = \sqrt{2g(h_0 - h_1)} = 254{,}58 m/s \approx 916{,}5 km/h$$

Vid 5000 meters höjd

Samma formler används men h_0 sätts till 5000 m

$$v = \sqrt{2g(h_0 - h_1)} = 290{,}61 m/s \approx 1046 km/h$$

Slutsats om fall utan luftmotstånd

Man kan se att utan luftmotstånd kommer hastigheten att öka ju längre föremålet faller, eftersom att hastigheten fortsätter accelerera om det inte finns en motståndskraft. Hade det varit på detta viset hade det aldrig bildats en kraft i negativ riktning när man fäller ut fallskärmen, man skulle även där få en accelererande hastighet och inte överleva hoppet när man väl kommer ner till marken. Detta är alltså en helt orealistisk modell.

Med luftmotstånd

Nu när modellen ska beräknas med hänsyn till luftmotståndet används ekvation **(1)**.
När man hoppar ut från planet kommer hastigheten att öka på grund av tyngdaccelerationen och luftmotståndet kommer också att öka ju högre hastigheten blir. Hastigheten kommer att öka, men accelerationen att minska, tills det blir en jämvikt mellan tyngdkraften och luftmotståndet. Maximal hastighet kommer att uppnås när detta sker.

$$mg = \frac{1}{2} \cdot p \cdot v^2 \cdot A \cdot C_d$$

Om man inför ett kartesiskt koordinatsystem med origo vid marken kan man räkna på rörelsen i både x- och y-led, då man faktiskt redan har en hastighet när man hoppar ut från planet, nämligen planets hastighet i x-riktning. Hastigheten i horisontell riktning påverkar inte hastigheten i den vertikala riktningen eftersom att de är vinkelräta mot varandra. Flygplanets hastighet har inget med projektets uträkningar att göra eftersom att nedslagspunkten inte är intressant just nu, då sträckan man förflyttats i x-led beror mycket på faktorer som har skalats bort.

För att kunna räkna behövs siffror på faktorerna. Vikten på utrustningen och arean på en typisk fallskärm har tagits från fallskärmsföretags hemsidor. Den varierar givetvis men i beräkningarna används ett medelvärde.

Arean på en fallande människa har uppskattats. Motståndskoefficienten C_d är en koefficient som varierar med föremålets form. C_d för en människa har uppskattats med hjälp av en tabell över C_d för olika former[3].

Luftens densitet har hämtats ur en tabell[4] för olika höjder inom dem som används i uträkningarna, sedan har ett medelvärde beräknas.

De funna värdena på faktorerna:

m = 75 kg (person) + 15 kg (utrustning)[5] = 90 kg
$A = 1\ m^2$ (människa)
$\rho = 0{,}94\ kg/m^3$
C_d (människa) = 0,42

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{p \cdot A \cdot C_d}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 90 \cdot 9{,}82}{0{,}94 \cdot 1 \cdot 0{,}42}} = 66{,}9 m/s \approx 240 km/h$$

Nu måste fallsträckan då maxhastigheten är uppnådd bestämmas, det vill säga en formel där hastigheten är en funktion av fallsträckan. Kraftekvationen projiceras på den vertikala axeln (y-led).

Kraftekvationen $mg = F_d$, där $k = \frac{1}{2} p \cdot A \cdot C_d$

$\downarrow: m\ddot{y} = mg - kv^2$ **(2)**

Nu innehåller vänsterledet en accelerationsterm

$\ddot{y} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} * \frac{dy}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dy}$ **(3)**

Den skrivs om med kedjeregeln för att få hastigheten

(3) sätts in i **(2)**

$mv \cdot \frac{dv}{dy} = mg - kv^2 \quad \rightarrow \quad v \cdot \frac{dv}{dy} = g - \frac{kv^2}{m}$ **(4)**

Det som söks är dy vilket måste integreras för att få y. Därför löses dy ut ur **(4)**

---

3 http://en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient
4 http://www.digitaldutch.com/atmoscalc/
5 www.skydive.se, rådfrågning via e-mail

$$v \cdot \frac{dv}{g - \frac{kv^2}{m}} = dy$$

Om variabelbytet $v^2 = u$ utförs kan detta deriveras till $2vdv = du$ och kan sättas in i formeln

$$\frac{du}{2\left(g - \frac{ku}{m}\right)} = dy$$

Detta integreras

$$-\frac{m}{2 \cdot k \cdot \ln\left(g - \frac{ku}{m}\right)} = y + c \qquad \mathbf{(5)}$$

Med hjälp av BV: $y = 0$, $v = 0$ fås:

$$c = -\frac{m}{2 \cdot k \cdot \ln(g)}$$

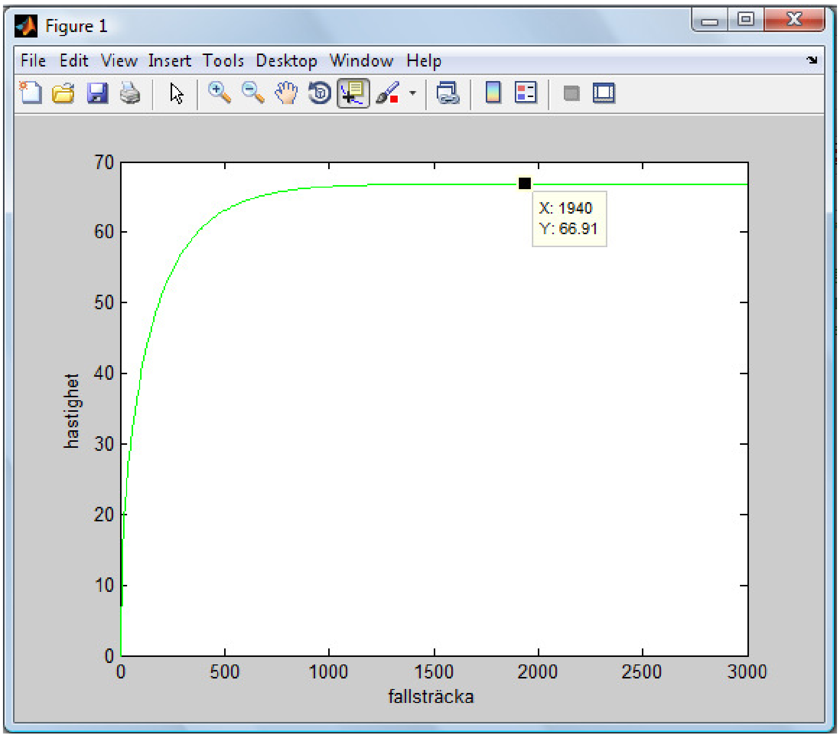
som sätts in i **(5)**

$$-\frac{mg}{2 \cdot k \cdot \ln\left(g - \frac{ku}{m}\right)} = y - \frac{m}{2 \cdot k \cdot \ln(g)}$$

$$\ln\left(1 - \frac{kv^2}{mg}\right) = -\frac{2k}{m} \cdot y \qquad \mathbf{(6)}$$

Hastigheten löses ut ur **(6)** och då fås en funktion för hastigheten med avseende på fallsträckan.

$$v^2 = \frac{mg}{k \cdot \left(1 - e^{-\frac{2k \cdot y}{m}}\right)} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{mg}{k \cdot \left(1 - e^{-\frac{2k \cdot y}{m}}\right)}} \qquad \mathbf{(7)}$$



Figur 2

Utifrån grafen kan man se att personen har fallit 1940 m när maxhastigheten är uppnådd: 66,9 m/s.

Det skulle vara intressant att veta hur länge det fria fallet varar, innan man behöver fälla ut fallskärmen. Tiden det tar i fritt fall består av två räkningar, först ett medelvärde av hastigheten när den fortfarande accelererar och sedan den tiden det tar att färdas den resterande sträckan i jämvikt. Ett annat alternativ skulle vara att integrera funktionen **(7)** men detta blev en allt för svår integral så det första alternativet valdes.

Fallsträckan:
Från 5000 m: 5000 m -700 m= 4300 m
Från 4000 m: 4000 m -700 m = 3300 m

Medelvärdet utav tiden då den accelererar:

$$\Delta t = \frac{\Delta y}{\Delta v} = \frac{1940m}{66{,}9m/s} = 28{,}999s \approx 29s$$

Eftersom att fallsträckan för att komma upp till maxhastigheten ligger under båda höjdernas gränser, betyder det att medeltiden som har räknats fram gäller båda höjderna. Kvar är att räkna ut tiden då hastigheten är konstant.

För 4000 meter:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{y}{v} = \frac{3300m - 1940m}{66{,}9m/s} = 20{,}3s$$

Den sammanlagda tiden blir då för 4000 m:

$$29s + 20s = 49s$$

För 5000m:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{y}{v} = \frac{4300m - 1940m}{66,9m/s} = 35,3s$$

Den sammanlagda tiden blir då för 5000 m:

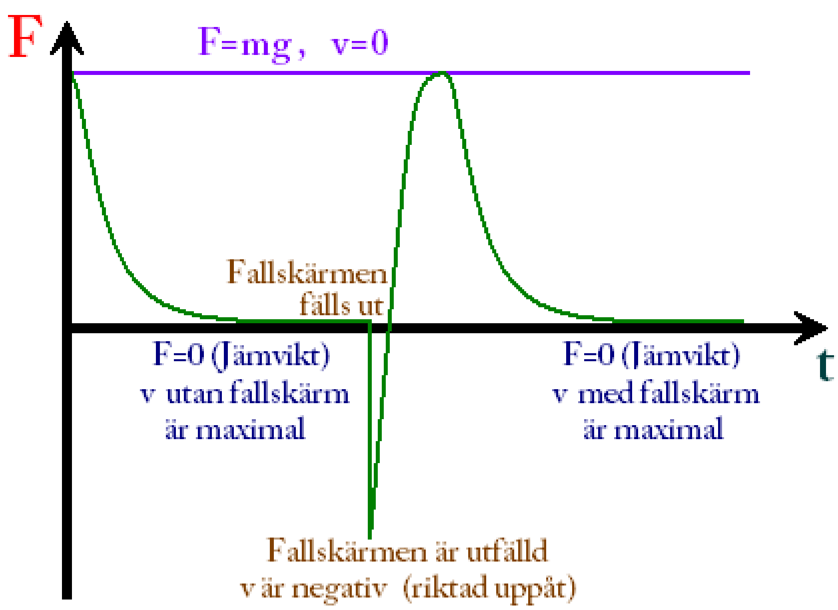
$29s + 35s = 64s$

Fall med fallskärm

Fallskärmen fälls ut

Först faller fallskärmshopparen fritt och hamnar i jämvikt. Hastigheten är då maximal för fall utan utfälld fallskärm. När fallskärmen fälls ut blir luftmotståndets kraft större än gravitationskraften och fallskärmshopparen får en acceleration riktat uppåt, vilket leder till en hastighet riktad uppåt (efter att hastigheten blivit noll i ett ögonblick). Denna hastighet kommer att minska i och med gravitationskraften och att ytterligare ett luftmotstånd uppstår, riktad uppifrån och ner på fallskärmen då den åker upp. Till slut kommer fallskärmen och fallskärmshopparen hamna i jämvikt och ingen acceleration kommer att ske. Hastigheten är då maximal i negativ y-riktning. Sen kommer krafterna neråt bli större än krafterna uppåt och hastigheten kommer att minska så att fallskärmshopparen till slut inte har någon hastighet uppåt. I ett ögonblick kommer fallskärmshopparen sväva stilla i luften och kraften är då $F = mg$. Sedan kommer han börja falla neråt och ett luftmotstånd nerifrån riktad uppåt uppstår igen. Till slut kommer fallskärmshopparen återgå till jämvikt och hastigheten är då maximal i positiv y-riktning för utfälld fallskärm.

Allt detta kommer att ske mycket fort och g-kraften kan bli påtaglig om fallskärmshopparens hastighet är för stor när denne fäller ut fallskärmen.



Figur 3

Maximal hastighet med fallskärmen

Den maximala hastigheten man kan uppnå när fallskärmen är ute beräknades enligt formeln som användes för att hoppa utan fallskärm. Det som ändrades var arean, vilken togs ett rimligt medelvärde på (en fallskärm har en area på 7-17 m^2) [6] , densiteten ändras till ett medelvärde på de sista tusen metrarna och konstanten C_d, vilken för en fallskärm är 0,75. [7]

A = 12 m^2 (fallskärm)
ρ = 1,17 kg/m^3
C_d (fallskärm) = 0,75

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{p \cdot A \cdot C_d}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 90 \cdot 9{,}82}{1{,}17 \cdot 12 \cdot 0{,}75}} = 13{,}0 m/s \approx 46{,}7 km/h$$

Nedslag i marken

Om man inte gör något för att bromsa in när man ska landa kommer man att falla hårt. Dock är detta inte vanligt, då man i verkligheten använder speciella metoder för att bromsa ner innan man landar. Att landa i den uträknade hastigheten innebär ett scenario där fallskärmshopparen blir medvetslös eller förlamad i hoppet. Det är inte hälsosamt att landa i denna hastighet, men man kan överleva.

Den senaste tidpunkten man ska släppa ut fallskärmen på är teoretiskt sett precis innan man nuddar marken. Detta eftersom luftmotståndet blir så stort att man får en hastighet riktad uppåt och har återfått en låg hastighet när man väl når marken. Detta är naturligtvis livsfarligt i verkligheten. Fallskärmen fälls inte alltid ut som den ska, och man måste se till att ha en bra bit fallsträcka kvar att hinna försöka fixa problemet på. Dessutom är det inte lika många vindar på marken som högt upp i luften som hjälper luftmotståndet att lyfta fallskärmen uppåt. Idag har många fallskärmshoppare dessutom en nödfallskärm som är självutlösande och fälls ut efter ett tag, om den riktiga fallskärmen inte skulle ha fällts ut.

Resultat

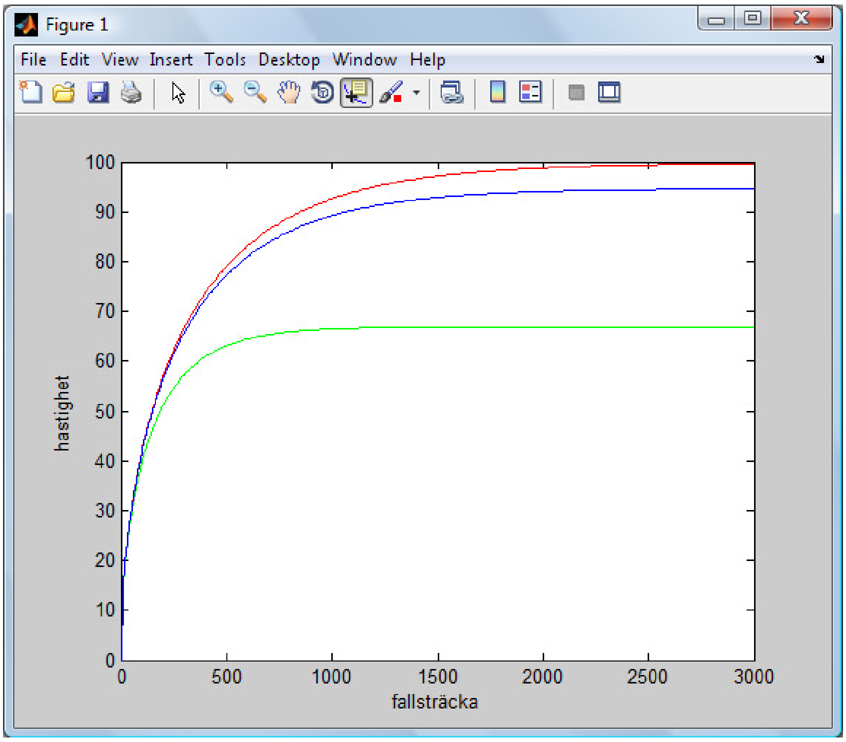
Hastigheter för de olika delarna av fallet:

	Maxhastighet (m/s)	Maxhastighet (km/h)
Fritt fall utan luftmotstånd	∞	∞
Fritt fall med luftmotstånd	66,9	240,0
Fall med fallskärm	13,0	46,7

Tabell 1

[6] www.skydive.se, rådfrågning via e-mail
[7] http://www.pcprg.com/rounddes.htm

Om man jämför hur hastigheten varierar mellan areor och massor kan man se att man får helt skilda resultat, här är en graf som visar några utav skillnaderna. Den gröna funktionen är den som är uträknad tidigare i rapporten, i den blåa har arean ändrats till att motsvara en person som hoppar rakt och till sist den röda där massan har ändrats till 200 kg.



Figur 4

Världsrekord i skydiving

Joseph Kittinger slog 1960 världsrekord då han hoppade från 31 330 meters höjd och kom upp i 319 m/s (989 km/h). Man planerar att i sommar ska detta rekord bli slaget då man ska hoppa från 36 576 meters höjd. I försöket ska man även studera hur människan klarar av att nå så höga hastigheter som man kommer upp i.

För att komma upp i denna hastighet krävs att man hoppar i en tunn atmosfär, har en tung vikt och liten area. Dessa hopp sker på en så pass hög höjd att atmosfären är mycket tunn. Men man får inte hoppa på för hög höjd där gravitationen blir för svag. Tung vikt får man i hopp från så pass hög höjd då det krävs att man hoppar i rymddräkt, vilken väger ca 140 kg. Liten area uppnår man bäst genom att hoppa i vertikalled.

Slutsats och diskussion

Nathalie som har hoppat fallskärm kan relatera dessa resultat till sin hoppning. När man hoppar för första gången hoppar man alltid tandemhopp vilket gör att massan blir större än i resultaten. Detta kan göra att värdena varierar. När man ska välja vad man vill hoppa kan man oftast välja mellan 4-5 km. Skillnaden sägs vara ca 15 s mer fritt fall i det högre hoppet, ca 45 s för 4000 m medan ca 60 s för 5000 m. Man kan se att våra resultat är väldigt lika, det skiljer endast 4 s och detta kan ha att göra med massan eller en annan modellering av fallet. Slutsatsen är att dessa värden stämmer bra med verkligheten.

Modellen som använts kan ställa till problem när vindar har allt för stor inverkan för de kan påverka luftmotståndet och rörelsen i luften. Hade man haft med densiteten vid de olika höjderna hade man självklart fått en mer verklighetstrogen modell, men skillnaden i densitet är inte så stor på höjderna som har observerats så felen blir inte så stora.

En ytterligare frågeställning skulle kunna vara att studera rörelsen i x-led för att granska landningspunkten. Men eftersom att man styr fallskärmen kan man inte ställa upp en allmän formel för detta.

Referenser:

Artikel: *Aerodynamic drag ...and its effect on the acceleration and top speed of a vehicle* 2009-12-30, Craig Reyenga
http://craig.backfire.ca/pages/autos/drag

Hemsidan för världsrekordet: Space Jump
http://www.spacejump.co.uk/

Företagshemsida: Stockholms Fallskärmsklubb
www.skydive.se

Calculating the descent rate of a round parachute, Dr Jean Potvin
http://www.pcprg.com/rounddes.htm

Luftmotståndskonstant för olika föremål: http://en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient/

Räknare av atmosfärens densitet: *1976 Standard Atmosphere Calculator*, Digital Dutch
http://www.digitaldutch.com/atmoscalc/