



KTH Teknikvetenskap

KS1+2

2006-06-07

Mikroelektronik, 4 p 2005/06

Göran Karlsson

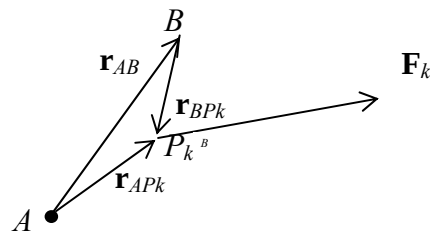
Göran Karlsson

Kontrollskrivning nr 1+2 – KS 1+2 – 2006-06-07

5C1106 Tillämpad fysik, mekanik, 4 poäng

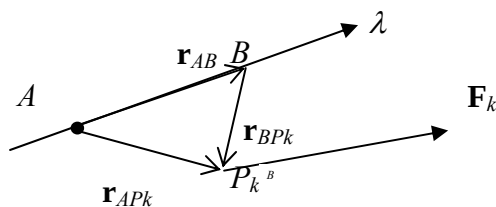
Lösningar

1. a)



$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A &= \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_{APk} \times \mathbf{F}_k = \sum (\mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{BPk}) \times \mathbf{F}_k = \\ &= \mathbf{r}_{AB} \times \sum \mathbf{F}_k + \sum \mathbf{r}_{BPk} \times \mathbf{F}_k = \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} + \mathbf{M}_B = \mathbf{M}_B + \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} \\ \boxed{\mathbf{M}_A = \mathbf{M}_B + \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F}}. \end{aligned}$$

b)



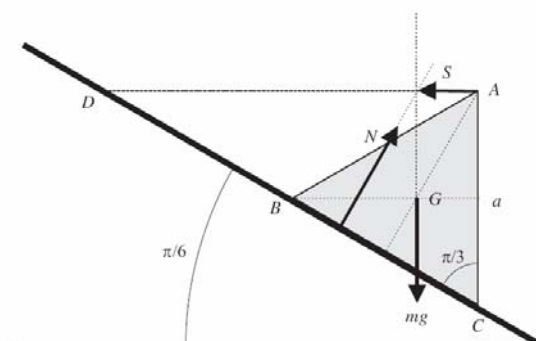
$$\begin{aligned} M_{A\lambda} &= \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{r}_{APk} \times \mathbf{F}_k \right) \cdot \mathbf{e}_\lambda = \left(\sum (\mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{BPk}) \times \mathbf{F}_k \right) \cdot \mathbf{e}_\lambda = \\ &= \mathbf{r}_{AB} \times \sum \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{e}_\lambda + \left(\sum \mathbf{r}_{BPk} \times \mathbf{F}_k \right) \cdot \mathbf{e}_\lambda = \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\lambda + \mathbf{M}_B \cdot \mathbf{e}_\lambda \\ &= 0 + M_{B\lambda} \end{aligned}$$

Men A och B kan väljas godtyckligt:

$$\boxed{M_{A\lambda} = M_{B\lambda} = M_\lambda \text{ oberoende av var punkterna } A \text{ och } B \text{ ligger p\u00e5 axeln.}}$$

c) $\mathbf{F} = -P\mathbf{e}_x + P\mathbf{e}_z$; $\mathbf{M}_O = -aP\mathbf{e}_y + aP\mathbf{e}_z - aP\mathbf{e}_y + aP\mathbf{e}_y = -aP\mathbf{e}_y + aP\mathbf{e}_z$
 $\boxed{\mathbf{F} = (-1, 0, 1)P; \mathbf{M}_O = (0, -1, 1)aP.}$

2. a)



b) Totala kraften i horisontell respektive vertikal led blir:

$$\begin{aligned} \rightarrow: & -S + N \sin(\pi/6) = 0; \\ \uparrow: & -mg + N \cos(\pi/6) = 0. \end{aligned}$$

$$\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2; \quad \sin(\pi/6) = 1/2$$

c) Detta ger $S = N/2$ resp $N = mg\sqrt{3}$.

$$\text{Detta ger } \boxed{S = mg/\sqrt{3}.}$$

VÄND

3. a) Kraften $\mathbf{F}$ sägs vara konservativ om arbetsintegralen $U_{1-2} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av integrationsvägen mellan $\mathbf{r}_1$ och $\mathbf{r}_2$.

$$U_{1-2} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} m\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} m\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} dt = m \int_{t_1}^{t_2} (\dot{v}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n) \cdot v\mathbf{e}_t dt = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2) = T_2 - T_1$$

$$\boxed{U_{1-2} = T_2 - T_1}$$

Att istället visa att $U_{1-2} = V_1 - V_2$ är också korrekt.

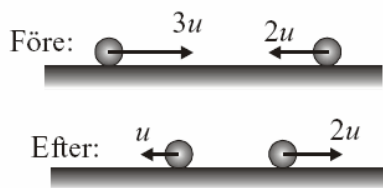
b)

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}} -G \frac{mM}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r} =$$

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}} G \frac{mM}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot (dr\mathbf{e}_r + r d\mathbf{e}_r) = \int_{r_1}^{r_2} G \frac{mM}{r^2} \cdot dr = -G \frac{mM}{r} + \text{konst}; \text{konst väljes } = 0$$

$$\boxed{V(r) = -G \frac{mM}{r}}$$

c)



$$e = - \frac{\dot{x}_{2e} - \dot{x}_{1e}}{\dot{x}_{2f} - \dot{x}_{1f}} = - \frac{2u - (-u)}{-2u - 3u} = - \frac{3}{-5} = \frac{3}{5}$$

$$\boxed{e = \frac{3}{5}}$$

4. a) För cirkelbanehastigheten v_c gäller för Newtons andra lag i $\mathbf{e}_n$ -riktningen (med $r = 2R$):

$$-m \frac{v_c^2}{2R} = - \frac{GMm}{(2R)^2}. \text{ Detta leder till } v_c^2 = \frac{GM}{2R}.$$

$$\text{Totala mekaniska energin } E_c = T + V; E_c = \frac{1}{2} m v_c^2 - \frac{GMm}{2R} = \frac{1}{2} \frac{GMm}{2R} - \frac{GMm}{2R} = - \frac{GMm}{4R}.$$

$$\boxed{E_c = - \frac{GMm}{4R}}. \text{ Även svaret } E_c = \frac{mgR}{4} \text{ går bra.}$$

- b) För ellipsbanan gäller allmänt $E_e = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r} = - \frac{GMm}{2a}$, där $2a$ är ellipsens storaxel.

(Alternativt kan man använda sig av rörelsemängdens bevarande och energins bevarande i de två punkterna A och B i stället för denna formel.)

$$\text{Eftersom storaxeln } 2a = 5R \text{ blir } \boxed{E_e = - \frac{GMm}{5R}} \text{ eller } E_e = - \frac{mgR}{5}$$

- c) Energitillskottet $\Delta E = - \frac{GMm}{5R} - (- \frac{GMm}{4R}) = \frac{GMm}{20R}$. $\boxed{\Delta E = \frac{GMm}{20R}}$ eller $\Delta E = \frac{mgR}{20}$.

GK