



KTH Mekanik

KSD

Mikroelektronik, 4 p

Göran Karlsson

2006-0x-yz

2005/06

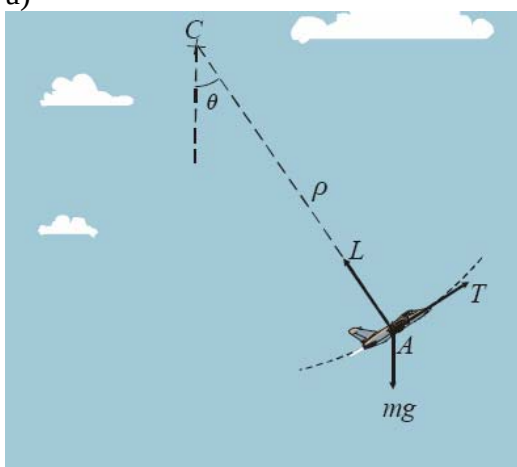
Läsåret 05/06

Kontrollskrivning nr D – KS D – 2006-0x-yz
5C1106 Tillämpad fysik, mekanik, 4 poäng

Lösningar

7.

a)

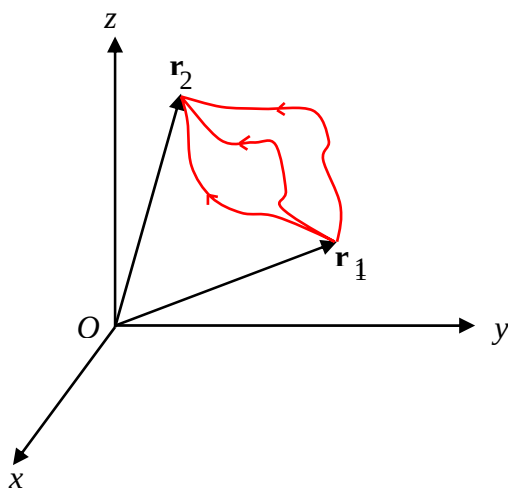


Kraftekvationen (rörelsemängdslagen; NII): $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

$$\mathbf{e}_t: m\dot{v} = T - mg \sin \theta \Rightarrow \boxed{T = m(\dot{v} + g \sin \theta)}$$

$$\mathbf{e}_n: m \frac{v^2}{\rho} = L - mg \cos \theta \Rightarrow \boxed{L = m\left(\frac{v^2}{\rho} + g \cos \theta\right)}$$

b)



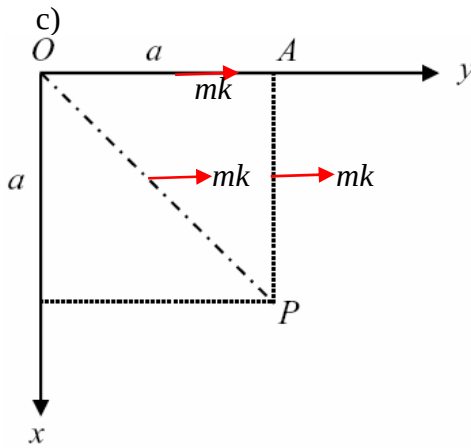
Definition: Kraften $\mathbf{F}$ sägs vara *konservativ* om arbetsintegralen

$$U_{1-2} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

är *oberoende* av integrationsvägen mellan de godtyckligt valda punkterna $\mathbf{r}_1$ och $\mathbf{r}_2$.

Man får således *samma värde* på integralen obereonde av vilken integrationsväg man väljer mellan de godtyckligt valda punkterna $\mathbf{r}_1$ och $\mathbf{r}_2$.

VÄND!



(i)

$$\begin{aligned}
 U_{O \rightarrow P} &= \int_{r_O}^{r_P} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_O}^{r_A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{r_A}^{r_P} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \\
 &= \int_{r_O}^{r_A} mke_y \cdot (dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y + dz\mathbf{e}_z) + \int_{r_A}^{r_P} mke_y \cdot (dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y + dz\mathbf{e}_z) = \\
 &= \int_0^a mky dy + \int_a^a mky dy = (mka - 0) + (mka - mka) = mka
 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 U_{O \rightarrow P} &= \int_{r_O}^{r_P} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_O(x=y)}^{r_P} mke_y \cdot (dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y + dz\mathbf{e}_z) = \int_0^a mky dy = \\
 &= (mka - 0) = mka
 \end{aligned}$$

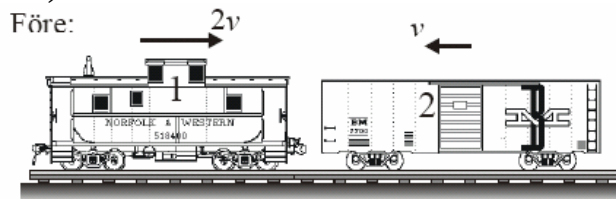
(iii) Nej, ty vi har inte provat alla oändligt många vägar som vi kan välja.

(Att två valda vägar ger samma resultat är nödvändigt men inte tillräckligt för att kraften ska vara konservativ; på annat sätt kan man dock visa att den är konservativ.)

8. a) Rörelsemängdsmomentet $\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$;

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_O.$$

b)



Systemets rörelsemängd bevaras:

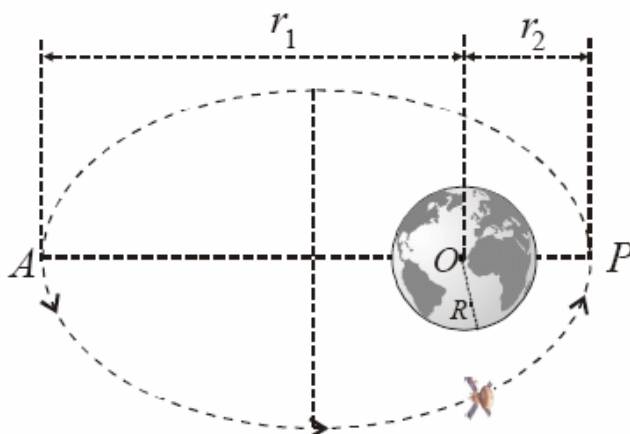
$$\begin{aligned}
 \rightarrow: m\dot{x}_{1e} + m\dot{x}_{2e} &= m\dot{x}_{1f} + m\dot{x}_{2f} \Rightarrow \\
 \Rightarrow mv_1' + mv_2' &= m2v - mv \Rightarrow v_1' + v_2' = v \quad (1)
 \end{aligned}$$

Studsstalet:

$$\begin{aligned}
 \rightarrow: e &= -\frac{\dot{x}_{2e} - \dot{x}_{1e}}{\dot{x}_{2f} - \dot{x}_{1f}} = -\frac{v_2' - v_1'}{-v - 2v} = \frac{v_2' - v_1'}{3v} = \frac{1}{3} \Rightarrow \\
 \Rightarrow v_2' - v_1' &= v \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$(1) + (2) \text{ ger } \boxed{v_2' = v}; \quad (1) - (2) \text{ ger } \boxed{v_1' = 0}.$$

c)



Tyngdkraften är en konservativ kraft och dess arbete kan bestämmas med hjälp av kraftens potentiella energi:

$$\begin{aligned}
 U_{A \rightarrow P} &= V_A - V_P = -G \frac{mM}{r_1} - \left(-G \frac{mM}{r_2} \right) = \\
 &= GMm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = gR^2 m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right);
 \end{aligned}$$

$$\boxed{U_{A \rightarrow P} = gR^2 m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)}.$$