



KTH Teknikvetenskap

KS1+2

2007-03-08

Mikroelektronik, 5 p 2006/07

Göran Karlsson

Göran Karlsson

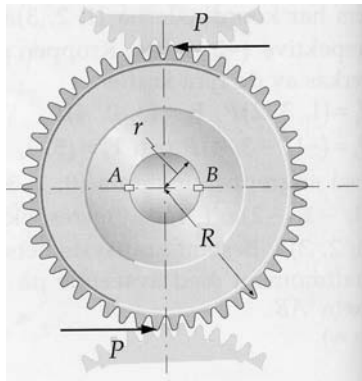
Kontrollskrivning nr 1+2 – KS 1+2 – 2007-03-08

5C1108 Tillämpad fysik, mekanik, 5 poäng

5C1106 Tillämpad fysik, mekanik, 4 poäng

Lösningar

1.

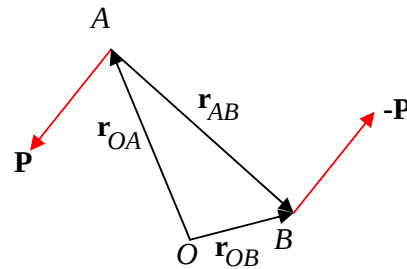


a)

$$M = M_O = RP + RP = 2RP = 2 \cdot 0,2\text{m} \cdot 50\text{N} = 20\text{ Nm.}$$

$$\boxed{M = 2PR = 20\text{ Nm}}$$

b)



$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{P} + \mathbf{r}_{OB} \times (-\mathbf{P}) = \\ &= (\mathbf{r}_{OA} - \mathbf{r}_{OB}) \times \mathbf{P} = \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{P} \end{aligned}$$

vilket är oberoende av momentpunkt O.

c)

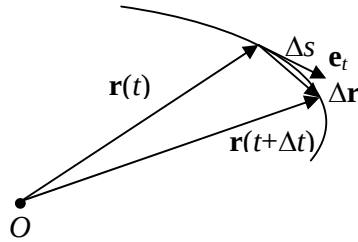
$$M = M_O = rF + rF = 2rF = 2RP \Rightarrow$$

$$F = \frac{R}{r} P = \frac{4r}{r} P = 4P = 4 \cdot 50\text{ N} = 200\text{ N}$$

$$\boxed{F = 4P = 200\text{ N}}$$

VÄND!

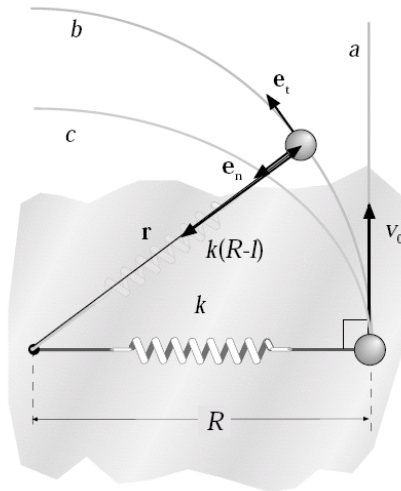
2. a)



$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}[s(t)]}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \mathbf{e}_t \cdot \dot{s} = \dot{s}\mathbf{e}_t$$

$$\boxed{\mathbf{v} = \dot{s}\mathbf{e}_t}$$

b)



Tyngdkraften och normalkraften är vinkelräta mot horisontalplanet. Fjäderkraften ligger i horisontalplanet enligt figuren.

c) För en viss utgångsfart v_0 fås den cirkulära banan b. (Hög fart ger bankurvan a, och låg fart bankurvan c.)

Rörelsemängdslagen (kraftekv, NII):

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\mathbf{e}_t: F_t = m\ddot{s} \Rightarrow m\ddot{s} = 0$$

$$\mathbf{e}_n: F_n = m \frac{\dot{s}^2}{\rho} \Rightarrow m \frac{\dot{s}^2}{R} = k(R-l)$$

Nu är

$$\dot{s} = v_0 = \text{konst} \Rightarrow$$

$$m \frac{v_0^2}{R} = k(R-l) \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{kR}{m}(R-l)}$$

3. a)

$$U_{1-2} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} m\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} m(\dot{s}\mathbf{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{e}_n) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} m(\dot{s}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n) \cdot v\mathbf{e}_t dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} m\dot{s}v dt = \int_{t_1}^{t_2} mv \frac{dv}{dt} dt = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2) = T_2 - T_1$$

$$\boxed{\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = T_2 - T_1}$$

b) Lagen om kinetiska energin: $U_{1-2} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = T_2 - T_1$ ger

$$\int_0^d -R\mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{x}\mathbf{e}_x = -Rd = \frac{1}{2} m \left(\frac{v_0}{3} \right)^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = -\frac{4}{9} mv_0^2 \Rightarrow R = \frac{4}{9} \frac{mv_0^2}{d}$$

$$\boxed{R = \frac{4}{9} \frac{mv_0^2}{d}}$$

$$\text{c) Förlorad mekanisk energi} = T_1 - T_2 = \frac{4}{9} mv_0^2$$

VÄND!

4. Rörelsemängdslagen ger $-k(x-l_0) - c\dot{x} = m\ddot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}l_0 \Leftrightarrow \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \frac{k}{m}l_0$

a) Villkor för svagt dämpad svängning: $\zeta < 1$: $\frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n = 2\zeta\sqrt{\frac{k}{m}} < 2\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boxed{c < 2\sqrt{mk}}$

b) $\zeta = \frac{c}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \Rightarrow \tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1-\frac{c^2}{4mk}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}}$

Svängningstiden $\tau_d = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}}$

c) Allmän lösning till differentialekvationen är summan av allmän lösning till homogena ekvationen och en partikulärlösning:

$$x = e^{-\zeta t} (A \sin \omega_d t + B \cos \omega_d t) + l_0 \quad (1)$$

Vid $t = 0$ är $x = l_0 \Rightarrow l_0 = B + l_0 \Leftrightarrow B = 0$

Sätt in $B = 0$ och tidsderivera (1): $\dot{x} = -\zeta e^{-\zeta t} A \sin \omega_d t + \omega_d e^{-\zeta t} A \cos \omega_d t$

Vid $t = 0$ är $\dot{x} = v_0 \Rightarrow v_0 = \omega_d A \Rightarrow A = \frac{v_0}{\omega_d}$

(1) blir således $\boxed{x = \frac{v_0}{\omega_d} e^{-\zeta t} \sin \omega_d t + l_0}$ där $\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m}(1-\zeta^2)}$ och där $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$

GK