



KTH Teknikvetenskap

KS1+2

Mikroelektronik, 7,5 hp

Göran Karlsson

2008-03-14

2007/08

Läsåret 07/08

Kontrollskrivning nr 1+2 – KS 1+2 – 2008-03-14 kl 10-14

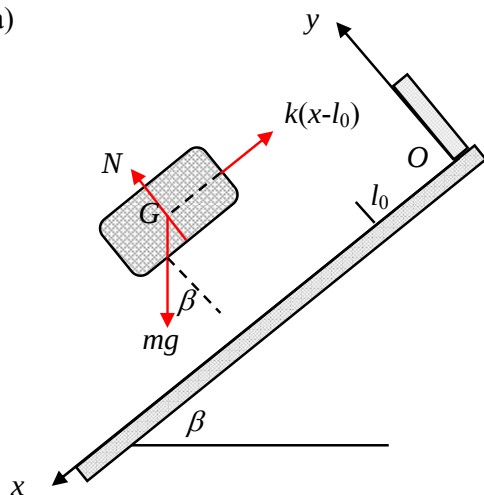
SG1108 Tillämpad fysik, mekanik, 7,5 hp

5C1108 Tillämpad fysik, mekanik, 7,5 hp

5C1106 Tillämpad fysik, mekanik, 6 hp

Lösningar

1. a)



Eftersom lådan inte roterar, måste de tre krafternas verkningslinjer skära varandra i en punkt som i figuren ($\mathbf{M}_G = \mathbf{0}$).

b) Kartesiskt koordinatsystem enligt a). Det blir något enklare om man i stället lägger koordinatsystemets origo vid fjäderns naturliga längd l_0 , men nu väljer vi att lägga origo vid väggen.

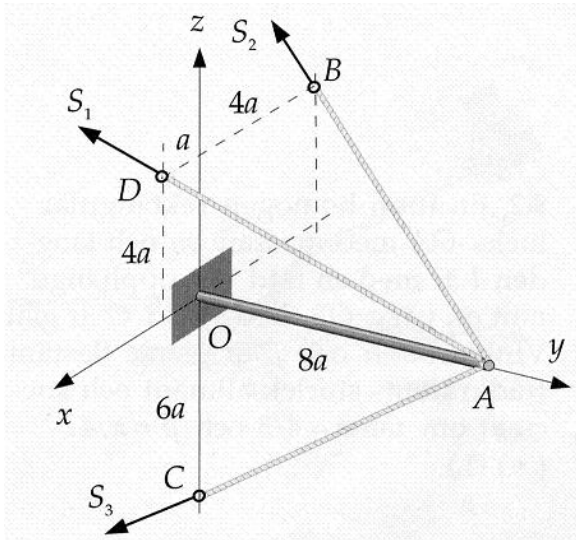
c) $\mathbf{F} = \mathbf{0}$

$$x \swarrow: \quad mg \sin \beta - k(x - l_0) = 0, \quad x - l_0 = d \Rightarrow \boxed{k = \frac{mg \sin \beta}{d}}$$

$$y \nwarrow: \quad N - mg \cos \beta = 0 \Leftrightarrow \boxed{N = mg \cos \beta}$$

VÄND

2.



A: (0, 8a, 0); B: (-4a, 0, 4a); C: (0, 0, -6a); D: (a, 0, 4a)

a) $\mathbf{S}_1 = S_1 \mathbf{e}_{AD}$; $\mathbf{S}_2 = S_2 \mathbf{e}_{AB}$; $\mathbf{S}_3 = S_3 \mathbf{e}_{AC}$

$$\mathbf{e}_{AD} = \frac{\mathbf{r}_{AD}}{r_{AD}} = \frac{(a, 0, 4a) - (0, 8a, 0)}{|(a, 0, 4a) - (0, 8a, 0)|} = \frac{(1, -8, 4)}{\sqrt{81}} = \frac{(1, -8, 4)}{9}$$

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{(-4a, 0, 4a) - (0, 8a, 0)}{|(-4a, 0, 4a) - (0, 8a, 0)|} = \frac{(-4, -8, 4)}{\sqrt{96}} = \frac{(-1, -2, 1)}{\sqrt{6}}$$

$$\mathbf{e}_{AC} = \frac{\mathbf{r}_{AC}}{r_{AC}} = \frac{(0, 0, -6a) - (0, 8a, 0)}{|(0, 0, -6a) - (0, 8a, 0)|} = \frac{(0, -8, -6)}{\sqrt{100}} = \frac{(0, -8, -6)}{10}$$

$$\mathbf{S}_1 = S_1 \mathbf{e}_{AD} = 9P \frac{(1, -8, 4)}{9} = (1, -8, 4)P$$

$$\mathbf{S}_2 = S_2 \mathbf{e}_{AB} = 3\sqrt{6}P \frac{(-1, -2, 1)}{\sqrt{6}} = 3(-1, -2, 1)P$$

$$\mathbf{S}_3 = S_3 \mathbf{e}_{AC} = 10P \frac{(0, -8, -6)}{10} = (0, -8, -6)P$$

$$\boxed{\mathbf{S}_1 = (1, -8, 4)P \quad \mathbf{S}_2 = 3(-1, -2, 1)P \quad \mathbf{S}_3 = (0, -8, -6)P}$$

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3 = (-2, -22, 1)P}$$

b)

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{S}_1 + \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{S}_2 + \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{S}_3 = \mathbf{r}_{OA} \times (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3) = \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F} = (0, 8a, 0) \times (-2, -22, 1)P =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 8 & 0 \\ -2 & -22 & 1 \end{bmatrix} aP = (8, 0, 16)aP = 8(1, 0, 2)aP$$

Reduktionsresultatet med avseende på O är $\boxed{\mathbf{F} = (-2, -22, 1)P, \mathbf{M}_O = 8(1, 0, 2)aP}$

c) Ja, eftersom alla krafter angriper i samma punkt A är $\mathbf{M}_A = \mathbf{0}$, och då $\mathbf{F} = (-2, -22, 1)P \neq \mathbf{0}$ så är

$\boxed{\mathbf{F} = (-2, -22, 1)P}$ enkraftresultant som lämpligen angriper i A.

VÄND

3. a) $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

$x \swarrow :$

$$mg \sin \beta - k(x - l_0) = m\ddot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_n^2} x = g \sin \beta + \frac{kl_0}{m}$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

b)

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = g \sin \beta + \frac{kl_0}{m} \quad (1) \Rightarrow \text{Homogena ekvationen: } \ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (2) \Rightarrow$$

$$\text{Karakteristiska ekvationen: } \lambda^2 + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega_n$$

$$\text{Allmän lösning till homogena ekvationen (2): } x_h = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t$$

Partikulärlösning till (1); ansätt $x_p = C = \text{konst}$; insättning i (1) ger

$$x_p = C = \frac{1}{\omega_n^2} (g \sin \beta + \frac{kl_0}{m}) = \frac{m}{k} (g \sin \beta + \frac{kl_0}{m}) = \frac{m}{k} g \sin \beta + l_0$$

$$\text{Allmän lösning till (1): } x = x_h + x_p = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t + \frac{m}{k} g \sin \beta + l_0 \quad (3)$$

Vid $t = 0$ är $x = l_0 + d + s$ och $\dot{x} = 0$.

Ins i (3) ger

$$l_0 + d + s = B + \frac{m}{k} g \sin \beta + l_0 \Leftrightarrow B = d + s - \frac{m}{k} g \sin \beta$$

$$\text{Men enligt uppgift 1 är } k = \frac{mg \sin \beta}{d} \Rightarrow B = d + s - s = s$$

Derivera (3) med avseende på tiden:

$$\dot{x} = A\omega_n \cos \omega_n t - s\omega_n \sin \omega_n t \quad (4)$$

$$t = 0 \text{ och } \dot{x} = 0 \Rightarrow A = 0$$

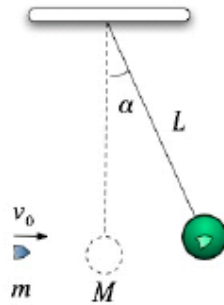
$$x = s \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + \frac{m}{k} g \sin \beta + l_0 = s \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + d + l_0$$

$$\boxed{x = s \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + d + l_0}$$

$$\text{c) (4) med } A = 0 \text{ ger } \dot{x} = -s\omega_n \sin \omega_n t = -s \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

$$v = |\dot{x}| = s \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \boxed{v = s \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

VÄND

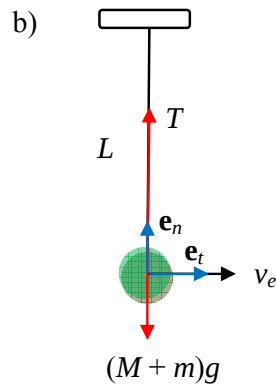


a) Rörelsemängden bevaras vid stöten: $\mathbf{p}_{1f} + \mathbf{p}_{2f} = \mathbf{p}_{1e} + \mathbf{p}_{2e}$

$$\rightarrow: mv_0 + 0 = (M+m)v_e \Leftrightarrow \boxed{v_e = mv_0 / (M+m)}$$

där v_e är den gemensamma hastigheten hos sandsäck och kula direkt efter stöten då kulan fastnat.

Anm: Då linan inte är en stel kropp hinner ingen reaktionsstötimpuls uppträda i denna under den korta stöttiden. Emellertid går det lika bra att använda att rörelsemängdsmomentet bevaras med avseende på linans upphängningspunkt (i taket).



Rörelsemängdslagen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ger i n -riktningen (huvudnormalriktningen):

$$T - (M+m)g = (M+m) \frac{v_e^2}{L} \Rightarrow T = (M+m)g + (M+m) \frac{m^2 v_0^2}{(M+m)^2 L}$$

$$\boxed{T = (M+m)g + \frac{m^2 v_0^2}{(M+m)L}}$$

c) Mekaniska energilagen: $T_\alpha + V_\alpha = T_e + V_e$; e är läget direkt efter stöten; α är vändläget

$$0 - (M+m)gL \cos \alpha = \frac{1}{2} (M+m)v_e^2 - (M+m)gL$$

$$gL \cos \alpha = gL - \frac{1}{2} \frac{m^2 v_0^2}{(M+m)^2}$$

$$\boxed{\alpha = \arccos \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m^2 v_0^2}{(M+m)^2 gl} \right)}$$