

Viktigaste formlerna i dynamikdelen av SG1108

Tillämpad fysik, mekanik

Kinematik i olika komponentsystem

Storhet	Kartesiska	Naturliga	Cylindriska
$\mathbf{r}$	$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$	$\mathbf{r} = \mathbf{r}[s(t)]$	$\mathbf{r}_{OP} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z$
$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$	$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z$	$\mathbf{v} = \dot{s}\mathbf{e}_t$	$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z$
$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$	$\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y + \ddot{z}\mathbf{e}_z$	$\mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{e}_n$	$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e}_z$

Definition: Rörelsemängd $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

Postulat: Newtons andra lag, Newton II, kraftlagen, rörelsemängdslagen:

$$\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{p}} \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Newton II i olika komponentsystem

Kartesiska	Naturliga	Cylindriska
$\mathbf{e}_x : F_x = m\ddot{x}$	$\mathbf{e}_t : F_t = m\ddot{s}$	$\mathbf{e}_r : F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$
$\mathbf{e}_y : F_y = m\ddot{y}$	$\mathbf{e}_n : F_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}$	$\mathbf{e}_\theta : F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$
$\mathbf{e}_z : F_z = m\ddot{z}$	$\mathbf{e}_b : F_b = 0$	$\mathbf{e}_z : F_z = m\ddot{z}$

Definition: Arbete $dU = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ $U_{1-2} = \int_{\mathbf{r}_1(C)}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där C är den valda integrationsvägen mellan punkterna $\mathbf{r}_1$ och $\mathbf{r}_2$.

Definition: Effekt $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$

Sats: $P = \frac{dU}{dt}$ Sats: $U_{1-2} = \int_{t_1}^{t_2} P dt$

Definition: Kinetisk energi $T = \frac{1}{2}mv^2$

Sats: Lagen om kinetiska energin $U_{1-2} = T_2 - T_1$ gäller alltid

Definition: Kraften $\mathbf{F}$ sägs vara konservativ om arbetsintegralen $U_{1-2} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av integrationsvägen mellan de två godtyckligt valda punkterna $\mathbf{r}_1$ och $\mathbf{r}_2$.

Definition: För konservativa kraften $\mathbf{F}$ existerar potentiella energin $V(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

Sats: $U_{1-2} = V_1 - V_2$ Sats: Mekaniska energilagen $E = T + V = \text{konst}$

Några potentiella energier

Allmänt: $V(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

Tyngdkraften: $V(\mathbf{r}) = V(z) = mgz + \text{konst}$ (väljs 0 vid nollnivån)

Gravitationskraften: $V(r) = -G \frac{mM}{r}$ [Gravitationskraften är $\mathbf{F} = -G \frac{mM}{r^2} \mathbf{e}_r$]

Fjäderkraften: $V = \frac{1}{2} k(\Delta l)^2$ [Fjäderkraften är $\mathbf{F} = -k(\Delta l) \mathbf{e}_x$]

Definition: Kraftmoment m a p O : $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

Definition: Rörelsemängdsmoment m a p O : $\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$

Sats: Momentekvationen $\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$ $M_z = \dot{H}_z$

Rotation kring fix z-axel

Definition: Tröghetsmomentet m a p z-axeln $I_z = \sum_i m_i \rho_i^2$

$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2$ $H_z = I_z \omega$

Definition: Impuls $\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt$

Definition: Impulsmoment eller momentimpuls $\mathbf{N}_O = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt$

Sats: Impulslagen $\mathbf{I} = \mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1) = m\mathbf{v}(t_2) - m\mathbf{v}(t_1)$

Sats: Impulsmomentlagen $\mathbf{N}_O = \mathbf{H}_O(t_2) - \mathbf{H}_O(t_1)$

Rörelsemängdens bevarande

Vid stöt mellan två partiklar (1) och (2) bevaras den totala rörelsemängden:

$$m_1 \mathbf{v}_{1f} + m_2 \mathbf{v}_{2f} = m_1 \mathbf{v}_{1e} + m_2 \mathbf{v}_{2e}, \text{ där } e = \text{efter och } f = \text{före}$$

Studstalet:

$$e = -\frac{\dot{x}_{2e} - \dot{x}_{1e}}{\dot{x}_{2f} - \dot{x}_{1f}} = -\frac{v_{2xe} - v_{1xe}}{v_{2xf} - v_{1xf}} = \frac{v_{2xe} - v_{1xe}}{v_{1xf} - v_{2xf}}$$

Centralrörelse

Definition: Kraften F sägs vara en centralkraft om dess verkningslinje hela tiden går genom en och samma fixa punkt O som kallas kraftcentrum.

Definition: En partikel som påverkas av endast en centralkraft sägs utföra en centralrörelse.

Sats: Vid centralrörelse är rörelsemängdsmomentet $m \mathbf{a} \times \mathbf{p}$ kraftcentrum O konstant:

$$\mathbf{H}_O = \text{konstant vektor}; \quad H_z = \text{konstant}.$$

Sats: Vid centralrörelse bevaras mekaniska energin $E = T + V = \text{konst}$

Svängningar

Fri odämpad svängning

$$-kx = m\ddot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

har allmän lösning: $x = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t$ $\omega_n = \sqrt{k/m}$ Svängningstid $\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$

Fri svagt dämpad svängning ($\zeta < 1$)

$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

har allmän lösning:

$$x = e^{-\zeta\omega_n t} (A \sin \omega_d t + B \cos \omega_d t) \quad \omega_n = \sqrt{k/m} \quad 2\zeta\omega_n = c/m \quad \text{Svängningstid } \tau_n = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Fri kritiskt dämpad svängning ($\zeta = 1$)

$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

har allmän lösning: $x = e^{-\omega_n t} (A + Bt)$

Påtvångad odämpad svängning

$$-kx + F_0 \sin \omega t = m\ddot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega$$

har bestående partikulärlösning: $x = \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin \omega t$

Påtvångad dämpad svängning

$$-kx - c\dot{x} + F_0 \sin \omega t = m\ddot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \Leftrightarrow \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

har bestående partikulärlösning:

$$x = \frac{F_0/k}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_n)^2}} \sin(\omega t - \alpha) \quad \text{där } \alpha = \arctan \frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

De olika huvudfallen av enkla, linjära svängningar är:
fri odämpad svängning, fri dämpad svängning, påtvingad
odämpad svängning och påtvingad dämpad svängning.

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = a_1 \cos \omega_1 t$$

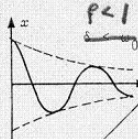
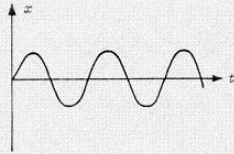
$$\zeta = 0,$$

odämpad svängning

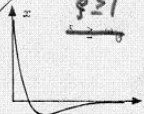
$$\zeta = 0,$$

dämpad svängning

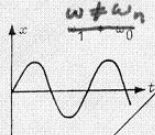
$F_0 = 0$,
fri
sväng-
ning



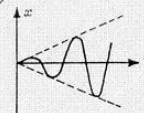
$$\zeta \geq 1$$



$F_0 \neq 0$,
på-
tvingad
sväng-
ning



$$\omega = \omega_n$$



Bestående
partikulär-
lösningen