

دانشگاه تهران
دانشکده فنی
گروه مکانیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

حل جریان تراکم پذیر لزج حول ایرفویل با استفاده از روش
فشرده

نگارنده: امین رسام

استاد راهنما: دکتر وحید اصفهانیان

استاد مشاور: دکتر فرشاد کوثری

مردادماه ۱۳۸۵

فهرست مطالب

ت	فهرست اشکال	۱
چ	فهرست جداول	۱
۱	پیشینه تحقیق	۱
۴	روش‌های فشرده	۲
۴	۲.۱ مقدمه	۴
۴	۲.۲ تقریب مشتق مرتبه اول به روش فشرده	۴
۶	۲.۳ خطای قطع و استنسیل به کار رفته در روش فشرده	۶
۹	۲.۴ تحلیل فوریه خطا	۹
۱۰	۲.۴.۱ تحلیل فوریه روش فشرده	۱۰
۱۵	۲.۵ مرزهای غیرمتناوب	۱۵
۱۶	۲.۵.۱ فرمولاسیون مشتق مرتبه اول در مرزها	۱۶
۱۶	۲.۵.۲ تحلیل فوریه خطا برای فرمولاسیون فشرده در مرزها	۱۶
۱۹	۲.۶ آزمایش‌های عددی	۱۹
۲۲	۲.۷ تحلیل مقدار ویژه‌ای برای روش فشرده	۲۲
۲۵	۲.۸ روش فشرده برای شبکه‌های مرکز سلولی	۲۵
۲۵	۲.۸.۱ مشتق اول بر روی شبکه مرکز-سلولی	۲۵
۲۸	۲.۹ روش‌های فشرده برای میانبایی و فیلتر	۲۸
۲۸	۲.۹.۱ میانبایی به روش فشرده	۲۸
۳۰	۲.۹.۲ فیلتر عددی فشرده	۳۰

۳	حل جریان یک‌بعدی نمونه به روش فشرده	۳۶
۳.۱	مقدمه	۳۶
۳.۲	معادلات اوایلر شبه یک‌بعدی	۳۶
۳.۳	روش فشردۀ مرکزی مرتبه ۴	۳۷
۳.۴	گسسته‌سازی بدون استفاده از عملگرها	۴۱
۳.۵	روش حل و شرایط مرزی	۴۳
۳.۵.۱	شرط مرزی خروجی مافوق صوت مرتبۀ دو	۴۴
۳.۵.۲	شرط مرزی خروجی مافوق صوت مرتبه سوم	۴۴
۳.۵.۳	شرط مرزی خروجی مادون صوت	۴۵
۳.۶	نتایج	۴۵
۳.۷	جملات استهلاکی غیرخطی	۴۶
۴	فرمولاسیون فشرده برای معادلات ناویر-استوکس	۵۲
۴.۱	مقدمه	۵۲
۴.۲	معادلات ناویر استوکس	۵۲
۴.۳	تبدیل معادلات در دستگاه مختصات منحنی الخط عمومی	۵۴
۴.۴	تقریب لایه نازک برای معادلات ناویر استوکس	۵۵
۴.۴.۱	فرمولاسیون لایه نازک برای معادلات ناویر استوکس	۵۶
۴.۵	فرمولاسیون فشرده برای گسسته‌سازی معادلات	۵۶
۴.۶	جملات اتلافی مصنوعی	۵۹
۴.۷	شرایط مرزی	۶۰
۴.۸	شبکه مورد استفاده	۶۰
۴.۹	نتایج	۶۱
۵	بررسی فیلترهای عددی فشرده	۶۷
۵.۱	مقدمه	۶۷
۵.۲	فرمولاسیون فیلتر در نقاط داخل میدان	۶۷
۵.۳	فرمولاسیون فیلتر در مرزها	۶۸
۵.۴	حل جریان بر روی صفحه تخت با استفاده از روش فشرده و استفاده از فیلتر	۷۰

۷۶	۶ حل جریان لزج بر روی ایرفویل با استفاده از فرمولاسیون فشرده
۷۶	۶.۱ مقدمه
۷۶	۶.۲ تولید شبکه
۷۷	۶.۳ تولید شبکه با استفاده از معادلات بیضوی
۸۰	۶.۴ معادلات ناویر-استوکس لایه نازک
۸۱	۶.۵ شرایط مرزی
۸۱	۶.۵.۱ سطح جسم
۸۳	۶.۵.۲ مرزهای پایین دست جریان
۸۳	۶.۵.۳ مرزهای مجازی حاصل از برش
۸۳	۶.۶ شرایط اولیه برای حل
۸۳	۶.۷ نتایج

فهرست شکلها

- ۲.۱ نمودار عدد موج تغییر یافته برحسب عدد موج برای تقریب مشتق اول (۱) . . . ۱۲
- ۲.۲ نمودار عدد موج تغییر یافته برحسب عدد موج برای تقریب مشتق اول (۲) . . . ۱۴
- ۲.۳ نمودار سرعت فاز برحسب عدد موج برای تقریب مشتق اول ۱۵
- ۲.۴ نمودار جزء حقیقی عدد موج تغییر یافته برحسب عدد موج، برای تقریب مشتق اول روش های فشرده مرزی ۱۷
- ۲.۵ نمودار جزء موهومی عدد موج تغییر یافته برحسب عدد موج، برای تقریب مشتق اول روش های فشرده مرزی ۱۸
- ۲.۶ نمودار مربوط به تست عددی برای $k_m = 9$ و $k_m = 21$ ۲۰
- ۲.۷ نمودار مربوط به آزمایش عددی برای $k_m = 31$ و $K_m = 63$ ۲۱
- ۲.۸ طیف مقدار ویژه w' ۲۳
- ۲.۹ تأثیر فرمولاسیون مرزی بر روی طیف مقدار ویژه w' ۲۴
- ۲.۱۰ نمودار عدد موج تغییر یافته برحسب عدد موج، برای شبکه مرکز-سلولی ۲۶
- ۲.۱۱ نمودار تابع تبدیل میانایی برحسب عدد موج برای روش های صریح و روش های فشرده ۳۰
- ۲.۱۲ نمودار تابع تبدیل فیلتر برحسب عدد موج برای روش های صریح و روش های فشرده سه قطری ۳۴
- ۲.۱۳ نمودار تابع تبدیل فیلتر برای روش های فشرده پنج قطری برحسب عدد موج . . . ۳۵
- ۳.۱ هندسه نازل شوین ۳۸
- ۳.۲ اثر فرمولاسیون شرط مرزی بر روی دقت روش فشرده مرتبه چهار ۴۷
- ۳.۳ حل دقیق فشار در طول نازل با استفاده از روابط آیزنروپیک ۴۷
- ۳.۴ تغییرات سرعت در طول نازل برای حالت جریان آیزنروپیک ۴۸

۳.۵	تغییرات فشار در طول نازل نسبت به فشار در ابتدای نازل برای حالت آیزنتروپیک	۴۸
۳.۶	تغییرات سرعت در طول نازل برای حالت همراه با شوک	۴۹
۳.۷	تغییرات فشار در طول نازل نسبت به فشار در ابتدای نازل برای حالت همراه با شوک	۴۹
۳.۸	تغییرات سرعت در طول نازل با اعمال جملات اتلافی غیرخطی	۵۰
۳.۹	تغییرات فشار نسبی در طول نازل با اعمال جملات اتلافی غیرخطی	۵۱
۴.۱	شکل شماتیک مسأله	۶۱
۴.۲	نمونه شبکه به کار رفته	۶۱
۴.۳	منحنی مولفه افقی سرعت در نقطه $x = L/2$ ، برای شبکه ۱	۶۳
۴.۴	منحنی مولفه افقی سرعت در نقطه $x = L/2$ ، برای شبکه ۳	۶۳
۴.۵	منحنی مشتق اول سرعت در نقطه $x = L/2$ ، برای شبکه ۳	۶۴
۴.۶	منحنی مشتق دوم سرعت در نقطه $x = L/2$ ، برای شبکه ۳	۶۴
۴.۷	منحنی همگرایی برای شبکه ۱	۶۵
۴.۸	منحنی همگرایی برای شبکه ۳	۶۵
۴.۹	مقایسه تاثیر جملات استهلاك عددی بر دقت حل برای شبکه ۱	۶۶
۴.۱۰	مقایسه تاثیر جملات استهلاك عددی بر دقت حل برای شبکه ۲	۶۶
۵.۱	تابع طیفی برای چند فرمولاسیون با دقت مختلف در نقطه دوم	۷۰
۵.۲	نمودار مقایسه سرعت، برای شبکه 30×60	۷۳
۵.۳	نمودار مقایسه مشتق اول سرعت، برای شبکه 30×60	۷۳
۵.۴	نمودار مقایسه مشتق دوم سرعت، برای شبکه 30×60	۷۴
۵.۵	نمودار مقایسه سرعت، برای شبکه 60×60	۷۴
۵.۶	نمودار مقایسه سرعت، برای شبکه 60×60	۷۵
۵.۷	نمودار مقایسه سرعت، برای شبکه 60×60	۷۵
۶.۱	شبکه فیزیکی و محاسباتی	۸۲
۶.۲	شبکه 55×141	۸۴
۶.۳	شکل بزرگ شده ای از لبه فرار ایرفویل	۸۵
۶.۴	نمودار ضریب اصطکاک پوسته ای برای $Re = 1000$ در زاویه حمله صفر	۸۵
۶.۵	نمودار ضریب فشار برای $Re = 1000$ در زاویه حمله صفر	۸۶

- ۶.۶ نمودار ضریب اصطکاک پوسته‌ای برای $Re = 10000$ در زاویه حمله صفر . ۸۶
- ۶.۷ نمودار ضریب فشار برای $Re = 10000$ در زاویه حمله صفر ۸۷
- ۶.۸ نمودار ضریب اصطکاک پوسته‌ای برای $Re = 1000$ در زاویه حمله ۴ درجه . ۸۷
- ۶.۹ نمودار ضریب فشار برای $Re = 1000$ در زاویه حمله ۴ درجه ۸۸

فهرست جداول

۲.۱	خطای قطع برای مشتق اول	۷
۲.۲	بازده تفکیک $e_1(\varepsilon)$ برای روش‌های مشتق اول نشان داده شده در شکل ۲-۱	۱۳
۲.۳	بازده تفکیک $e_1(\varepsilon)$ برای روش‌های مشتق اول نشان داده شده در شکل	۱۴
۲.۴	روش‌های مشتق مرتبه اول برای شبکه‌های مرکز-سلولی	۲۷
۲.۵	خطای قطع برای روش میانمایی	۲۹
۲.۶	خطای قطع برای روش‌های فیلتر کردن	۳۱
۳.۱	مقادیر محاسبه شده و دقیق در $x = 5$ و $x = 8$ برای حالت بدون شوک	۴۶
۴.۱	شبکه‌های به‌کار رفته در حل	۶۲
۵.۱	مقادیر ضرایب فیلتر برای نقاط داخل میدان	۶۹
۵.۲	مقادیر ضرایب فیلتر برای روش‌های مرتبه ۸ و ۱۰	۷۱
۵.۳	مقادیر ضرایب فیلتر برای روش‌های مرتبه ۴ و ۶	۷۲
۵.۴	مقادیر ضرایب فیلتر برای روش مرتبه ۶	۷۲
۶.۱	نتایج حاصل از حل	۸۴
ب.۱	مقادیر ضرایب فیلتر برای نقاط داخل میدان	۹۴

فصل ۱

پیشینه تحقیق

ابداع روش‌هایی نظیر روش فشرده که بر پایه چندجمله‌ای‌های هرمیتی^۱ می‌باشند به سال‌های بسیار دور باز می‌گردد. لیکن این روش در دو دهه اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است. در سال ۱۹۹۲ لی لی^۲ [۱۵] در مقاله‌ای به بررسی روش فشرده می‌پردازد. وی در این مقاله، بسیاری از جنبه‌های روش‌های فشرده را مورد بررسی قرار می‌دهد. لذا این مقاله از پایه‌ای‌ترین تحقیقات انجام شده بر روی این روش می‌باشد. لی لی در این مقاله به بررسی روش فشرده از لحاظ نحوه فرمولاسیون برای دستیابی به دقت‌های عددی مختلف، پایداری این روش و بررسی آن از دیدگاه آنالیز فوریه، استفاده در میانبایی، فیلتر و بحث حجم کنترل می‌پردازد.

کارپنتر و همکاران^۳ [۶] طی مقاله‌ای در سال ۱۹۹۳ به ارائه فرمولاسیون فشردۀ مناسب برای روش‌های مرتبه چهار و شش در مرزها می‌پردازند. و ضمن حل معادله موج یک بعدی اثر فرمولاسیون شرایط مرزی بر روی دقت و پایداری روش فشرده را مورد بررسی قرار داده‌اند.

در سال ۱۹۹۸ ماهش^۴ [۱۷] روش جدیدی از خانواده روش‌های هرمیتی را ارائه نمود. در این روش وی با محاسبه توأم مشتق اول و دوم، دقت روش و قدرت تفکیک^۵ آن را بالا می‌برد ضمن آنکه میزان محاسبات لازم برای این روش بیشتر می‌گردد چرا که دستگاه معادلاتی که بایستی حل گردد، از حالت سه‌قطری به پنج قطری افزایش می‌یابد. در عین حال با توجه به استدلال نویسنده با

^۱ Hermitian Polynomials

^۲ Lele

^۳ Carpenter et al

^۴ Mahesh

^۵ Resolution

انجام هوشمندانه محاسبات می‌تواند این افزایش محاسبات را به حداقل برساند. لذا افزایش قدرت تفکیک و بهبود سایر مشخصه‌ها، این روش را به‌عنوان یک روش جایگزین مطرح می‌نماید. در عین حال نویسنده در این مقاله و همچنین سایر محققان بعد از آن از این روش برای حل هیچ مسأله کاربردی استفاده ننموده‌اند. لذا موردی برای مقایسه این روش با سایر روش‌ها موجود نمی‌باشد.

در سال ۱۹۹۹ تریدلر^۶ و همکاران به حل جریان غیرلزج مادون صوت با استفاده از روش فشرده پرداختند. ایشان با بررسی روش فشرده مرتبه چهارم در محاسبات و با استفاده از روش‌های مختلف گسسته‌سازی زمانی به‌صورت ضمنی نظیر روش بیم و وارمینگ [۳] و روش قطری سازی *Chaussee* [۷] برای حل جریان غیرلزج بر روی استوانه نشان دادند که روش‌های مرتبه بالا دارای قابلیت کاهش زمان مصرفی پردازنده و کاهش شبکه مورد استفاده تا حداقل دو مرتبه بزرگی برای محاسبات دو بعدی و حتی بیشتر از آن در محاسبات سه‌بعدی می‌باشند. همچنین آن‌ها به این نتیجه دست یافتند که بهترین شکل گسسته‌سازی در مسائل حل پایدار جریان با استفاده از روش‌های ضمنی آن است که گسسته‌سازی قسمت ضمنی و صریح با استفاده از یک روش صورت گیرد. این مسأله باعث سرعت بخشیدن به همگرایی می‌گردد. البته این مسأله پیشتر توسط پولیام برای روش‌های غیر فشرده نیز مطرح شده بود. همچنین ایشان از لحاظ خطای پخش، که در حل مسائل آکوستیک اهمیت فراوانی دارد نیز مقایسه‌ای انجام دادند که در همه موارد انجام شده برای یک مسأله خطی و بدون استفاده از استهلاک مصنوعی به نتایج بسیار خوبی از عملکرد روش فشرده دست یافتند. نتیجه این بررسی نیز حاکی از تاثیر قابل ملاحظه روش به‌کار رفته در گسسته‌سازی قسمت ضمنی دارد، تا آنجا که استفاده از روش‌های مرتبه یک و دو به همراه روش فشرده برای این کاربردها به هیچ وجه توصیه نمی‌گردد.

در سال ۲۰۰۰ اکاتریناریس^۷ [۱۰] به حل جریان سیال لزج و غیر لزج بر روی ایرفویل *NACA* ۰۰۱۲ می‌پردازد. در این مقاله اگرچه وی به بررسی نتایج به‌دست آمده و ارائه جواب‌های به‌دست آمده نمی‌پردازد، اما با ارائه منحنی‌هایی برای مانده^۸ چگالی برحسب زمان بدون بعد، نشان می‌دهد که روش فشرده مرتبه چهارم نه‌تنها نسبت به همتای مرتبه دو خود برای به‌دست آوردن یک دقت مشخص به شبکه با تعداد سلول کمتری احتیاج دارد، بلکه مشخصات همگرایی حل بهتری را نیز دارا می‌باشد. روش فشرده در حل جریان‌های غیر دائم نیز مورد استفاده قرار گرفته برای نمونه‌ای از این بررسی می‌توان به مقاله‌ای که در سال ۱۹۹۹ و توسط ویسبال^۹ [۲۲] به‌چاپ رسیده‌است، اشاره نمود.

^۶Treidler

^۷Ekaterinaris

^۸Residual

^۹Visbal

از فرمولاسیون فشرده برای کاربرهای فیلتر نیز استفاده گردیده است. فرمولاسیون مربوط به این نوع از فیلترهای مرتبه بالا در مقاله مربوط به گایتوند^{۱۰} [۲۴] در سال ۲۰۰۰ به شکل کامل آورده شده و اثر این گونه از فیلترها در بهبود حل به دست آمده در برخی مسائل مکانیک سیالات نظیر جریان بر روی صفحه تخت، جریان بر روی استوانه و گردابه در حال حرکت در جریان آرام توسط ایشان مورد بررسی قرار گرفته است.

فرمولاسیون فشرده برای شبکه غیریکنواخت نخستین بار توسط گمت و همکاران^{۱۱} [۱۳] در سال ۱۹۹۹ ارائه شده است. در این مقاله فرمولاسیون فشرده غیریکنواخت برای تمامی نقاط، از جمله نقاط مرزی آورده شده است. در این مقاله شبیه سازی مستقیم عددی^{۱۲} در جریان متناوب مغشوش داخل کانال با استفاده از این روش مورد بررسی قرار گرفته است.

بررسی کارایی روش فشرده بر روی شبکه های غیریکنواخت و دارای اعوجاج، توسط ویسبال^{۱۳} [۲۳] در سال ۲۰۰۲ ارائه گردید. در این مقاله ایشان به بررسی برخی مسائل مربوط به کیفیت شبکه و کارایی روش فشرده غیریکنواخت می پردازند. آن ها برای نشان دادن کارایی این روش، به حل برخی مسائل مکانیک سیالات نظیر جریان لایه مرزی بر روی صفحه انعطاف پذیر، حل جریان آرام بر روی ایرفویل $NACA_{0012}$ در زاویه حمله بالا و مدل سازی گردابه در حال حرکت در جریان مادون صوت می پردازند.

اکاتریناریس^{۱۴} [۱۲] در سال ۲۰۰۴ طی مقاله ای به مقایسه برخی روش های مرتبه بالا برای مدل سازی مسائل مربوط به جابه جایی خطی، آتروآکوستیک و جریان های غیرلزج مافوق صوت بر روی استوانه و ایرفویل $NACA_{0015}$ در رژیم های مختلف جریان می پردازد. در این مقاله وی به مقایسه روش فشرده به همراه فیلترهای مشخصه ای^{۱۳} و روش های ونو^{۱۴} می پردازد. در سال ۲۰۰۶ Swaran فرمولاسیون جدیدی برای روش های فشرده بادسو^{۱۵} پیشنهاد نمود که در آن با افزودن یک جمله اتلافی مرتبه پنجم به روش فشرده معمول و نوشتن بسط تیلور و اعمال برخی محدودیت ها روش بادسوپی با مشخصه های تفکیکی بهتری به دست آورده است.

Gaitonde^{۱۰}

Gametetal^{۱۱}

DNS^{۱۲}

Characteristic – Based Filters^{۱۳}

WENO^{۱۴}

Upwind^{۱۵}

فصل ۲

روش‌های فشرده

۲.۱ مقدمه

بسیاری از پدیده‌های فیزیکی شامل دامنه وسیعی از مقیاس‌های^۱ زمانی و مکانی می‌باشند، جریان مغشوش سیال یک نمونه از این دست پدیده‌ها می‌باشد. مدل‌سازی مستقیم این فرایندها نیازمند آن است تا مقیاس‌های مربوطه به نحو مناسبی در مدل‌سازی نشان‌داده شوند. این نیازمندی‌ها باعث توسعه روش‌های طیفی گردیده‌است. استفاده از روش‌های طیفی البته دارای محدودیت‌هایی می‌باشد. این محدودیت‌ها ما را به سمت استفاده از روش‌های تفاضل محدودی که دارای ویژگی‌های روش‌های طیفی می‌باشند سوق می‌دهد. روش فشرده، یکی از این روش‌ها است که ما را قادر می‌سازد تا مقیاس‌های کوچک را بهتر مدل‌سازی نماییم. همچنین این روش نسبت به سایر روش‌های تفاضل محدود که دارای دقت مشابهی می‌باشند در مقابل مقیاس‌های کوچکتر بهتر عمل نموده و از این لحاظ به روش‌های طیفی نزدیکتر می‌باشد، درحالی که محدودیت‌های موجود در این روش را نیز دارا نمی‌باشد.

۲.۲ تقریب مشتق مرتبه اول به روش فشرده

در این روش با در دست داشتن مقادیر تابع در یک سری از نقاط مقادیر مشتق تابع را به صورت یک ترکیب خطی از مقادیر تابع می‌نویسیم. برای سادگی شبکه‌ای را در نظر می‌گیریم که یکنواخت بوده و اندیس i نشان‌دهنده یک نقطه از آن باشد. در این شبکه متغیر مستقل، $x_i = h(i - 1)$ می‌باشد،

^۱Scales

که $1 \leq i \leq N$ بوده و مقادیر تابع در گره‌ها به صورت $f_i = f(x_i)$ معلوم می‌باشند. f'_i تقریب تفاضل محدود برای مشتق اول، $(df/dx)(x_i)$ ، در گره i می‌باشد. این تقریب به مقادیر تابع در نقاط همسایگی گره i بستگی خواهد داشت. مقادیر مشتق اول و دوم براساس تفاضل مرکزی فشرده به ترتیب به (f_{i-1}, f_{i+1}) و $(f_{i-2}, f_{i-1}, f_{i+1}, f_{i+2})$ وابسته هستند. در روش‌های طیفی مقدار f'_i به مقادیر همه گره‌ها بستگی دارد. روش پاده یا سایر روش‌های تفاضل محدود فشرده از این خاصیت روش طیفی به‌گونه‌ای برخوردار می‌باشند.

روش‌هایی که در این فصل ارائه می‌گردند، همگی توسعه‌هایی از روش پاده^۲ می‌باشند. این توسعه‌ها با نوشتن معادلاتی به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \beta f'_{i-2} + \alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} + \beta f'_{i+2} \\ = c \frac{f_{i+3} - f_{i-3}}{6h} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4h} + a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \end{aligned} \quad (2.1)$$

رابطه بین ضرایب a, b, c, α و β با تطابق ضرایب سری تیلور از مرتبه‌های مختلف به دست می‌آید. اولین ضریب بسط که تطابق داده نمی‌گردد را به عنوان خطای قطع^۳ سری تیلور در نظر می‌گیریم. بر این اساس ضرایب به صورت زیر می‌باشند:

$$a + b + c = 1 + 2x + 2\beta \quad (\text{مرتبه دو}) \quad (2.2)$$

$$a + 2^2b + 3^2c = 2 \frac{3!}{2!} (\alpha + 2^2\beta) \quad (\text{مرتبه چهار}) \quad (2.3)$$

$$a + 2^4b + 3^4c = 2 \frac{5!}{4!} (\alpha + 2^4\beta) \quad (\text{مرتبه شش}) \quad (2.4)$$

$$a + 2^6b + 3^6c = 2 \frac{7!}{6!} (\alpha + 2^6\beta) \quad (\text{مرتبه هشت}) \quad (2.5)$$

$$a + 2^8b + 3^8c = 2 \frac{9!}{8!} (\alpha + 2^8\beta) \quad (\text{مرتبه ده}) \quad (2.6)$$

اگر متغیرهای وابسته نسبت به x متناوب باشند، آنگاه دستگاه معادلات (۲.۱) یک دسته معادله خطی برای مقادیر مشتق بوده و با حل آن مقدار مشتق تابع در هر گره به دست می‌آید. این دستگاه معادلات، وقتی β مخالف صفر باشد، یک دستگاه پنج‌قطری و وقتی $\beta = 0$ باشد یک دستگاه سه‌قطری می‌باشد. حالت کلی غیرمتناوب نیازمند روابط اضافی مناسب برای گره‌های مرزی می‌باشد. این روابط در بخش مرزهای غیرمتناوب مورد بررسی قرار می‌گیرند.

برای استفاده از معادله (۲.۱) در شبکه‌های غیریکنواخت از نگاشت بین شبکه فیزیکی و شبکه محاسباتی استفاده می‌نماییم. با این کار مقادیر مشتقات در شبکه غیریکنواخت به آسانی از همین

Pade^۲Truncation Error^۳

رابطه به دست می‌آید. البته می‌توان روابطی مشابه معادله (۲.۱) را برای شبکه غیریکنواخت نیز به دست آورد.

اکنون حالت‌های خاصی از معادله (۲.۱) را بررسی می‌نماییم. در این بخش حداقل دو قید اول از قیود (۲.۳) تا (۲.۶) اعمال می‌گردند. بنابراین همه روش‌هایی که توضیح داده می‌گردند حداقل دارای دقت مرتبه چهار می‌باشند.

در این فصل روش فشرده را از لحاظ تحلیل فوریه و خطای قطع نیز مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش مربوط به تحلیل فوریه خطا، تحلیلی از خطای پراکندگی^۴ ارائه می‌گردد. همان‌طور که مشاهده خواهیم نمود، این بررسی بهبود قدرت تفکیک برای مقیاس‌های کوچک (تفکیک شبیه‌طیفی) را در مورد روش‌هایی که در این فصل ارائه می‌گردند، نشان می‌دهد.

در بخش خطای قطع نیز به صورت مرسوم به بررسی روش‌های تفاضل محدود (۲.۱) براساس خطای قطع و استنسیل محاسباتی لازم، می‌پردازیم.

۲.۳ خطای قطع و استنسیل به کار رفته در روش فشرده

معادله (۲.۱) به همراه معادله (۲.۳) و (۲.۴) را می‌توان به عنوان یک خانواده سه پارامتری از روش‌های مرتبه چهار در نظر گرفت. اگر این خانواده را $\beta = 0$ محدود نماییم، دسته‌ای از روش‌های سه قطری به دست می‌آید و اگر $\beta \neq 0$ باشد، دسته‌ای از روش‌های پنج قطری به دست می‌آید. اگر قید اضافی مربوط به دقت مرتبه شش را نیز اعمال نماییم، یک خانواده دو پارامتری از روش‌های پنج-قطری از مرتبه شش به دست می‌آید. این نتیجه را می‌توان به یک خانواده یک پارامتری از مرتبه هشت پنج قطری یا یک روش مرتبه ده تبدیل نمود.

نخست روش‌های سه قطری را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این روش‌ها با قرار دادن $\beta = 0$ به دست می‌آیند. اگر شرط $c = 0$ را نیز برقرار نماییم، یک خانواده سه قطری مرتبه چهار تک پارامتری (α) به دست می‌آید. برای این خانواده داریم:

$$\beta = 0, \quad a = \frac{2}{3}(\alpha + 2), \quad b = \frac{1}{3}(4\alpha - 1), \quad c = 0 \quad (2.7)$$

خطای قطع مربوط به معادله (۲.۱) برای این روش و روش‌های دیگر که در زیر آورده می‌شوند، در جدول ۲.۱ نشان داده شده‌اند. اندازه استنسیل که در جدول آمده، بزرگترین اندازه استنسیل لازم برای آن دسته به خصوص از روش‌ها را نشان می‌دهد. اگر $\alpha \rightarrow 0$ باشد، این خانواده به روش تفاضل

جدول ۲.۱: خطای قطع برای مشتق اول

خطای قطع	بزرگترین اندازه		روش
	استنسیل راست	استنسیل چپ	
$\frac{4}{5!}(3\alpha - 1)h^4 f^{(5)}$	۵	۳	(۲.۷)
$\frac{4}{6!}h^6 f^{(6)}$	۵	۳	(۲.۸)
$\frac{12}{6!}(-8\alpha + 3)h^6 f^{(6)}$	۷	۳	(۲.۹)
$\frac{-36}{9!}h^8 f^{(9)}$	۷	۳	(۲.۹) و $\alpha = \frac{2}{3}$
$\frac{4}{5}(-1 + 3\alpha - 12\beta + 10c)h^4 f^{(5)}$	۷	۵	(۲.۱۰)
$\frac{12}{6!}(3 - 8\alpha + 20\beta)h^6 f^{(6)}$	۷	۵	(۲.۱۱)
$\frac{4}{6!}(9\alpha - 4)h^6 f^{(6)}$	۵	۵	(۲.۱۲)
$\frac{-16}{9!}h^8 f^{(9)}$	۵	۵	(۲.۱۳)
$\frac{144}{9!}(2\alpha - 1)h^8 f^{(9)}$	۷	۵	(۲.۱۴)
$\frac{144}{11!}h^{10} f^{(11)}$	۷	۵	(۲.۱۵)

محدود مرکزی مرتبه چهار تبدیل می شود. به طریق مشابه، برای $\alpha = \frac{1}{3}$ روش کلاسیک پایه به دست می آید. همچنین برای $\alpha = \frac{1}{3}$ اولین جمله مربوط به خطای قطع از بین رفته و روش دارای دقت مرتبه شش می گردد. در این صورت ضرایب عبارتند از:

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = 0, \quad a = \frac{14}{9}, \quad b = \frac{1}{9}, \quad c = 0 \quad (2.8)$$

اگر $\beta = 0$ و $c \neq 0$ باشند، خانواده روش های (۲.۷) به یک خانواده سه قطری دو پارامتری و از مرتبه چهار تبدیل می شود. در درون این خانواده، خانواده ای یک پارامتری قرار دارد که از مرتبه شش بوده و سه قطری می باشد. برای این خانواده داریم:

$$\beta = 0, \quad a = \frac{1}{6}(\alpha + 9), \quad b = \frac{1}{15}(32\alpha - 9), \quad c = \frac{1}{10}(-3\alpha + 1) \quad (2.9)$$

روش مرتبه شش سه قطری (۲.۸) عضوی از این خانواده می باشد (با $c = 0$ و $\alpha = \frac{1}{3}$). این خانواده مرتبه شش را می توان با انتخاب $\alpha = \frac{2}{8}$ به یک روش مرتبه هشت تبدیل نمود. این روش، روشی سه قطری ($\beta = 0$) می باشد، که دارای بالاترین مرتبه از دقت در خانواده (۲.۱) است. روش های پنج قطری را با قرار دادن $\beta \neq 0$ به دست می آوریم. در حالت کلی این خانواده سه پارامتری (α, β, c) مرتبه چهار به صورت زیر می باشد:

$$a = \frac{1}{3}(4 + 2\alpha - 16\beta + 5c), \quad b = \frac{1}{3}(-1 + 4\alpha + 22\beta - 8c) \quad (2.10)$$

روش های دارای دقت مرتبه شش دارای دو پارامتر α و β می باشند. این پارامترها به صورت زیر هستند:

$$a = \frac{1}{6}(9 + \alpha - 20\beta), \quad b = \frac{1}{15}(-9 + 32\alpha + 62\beta) \\ c = \frac{1}{10}(1 - 3\alpha + 12\beta) \quad (2.11)$$

خانواده سه قطری مرتبه شش که با معادله (۲.۹) نمایش داده می شود یک زیرگروه خانواده (۲.۱۱) می باشد. یک زیرگروه دیگر با قرار دادن $\beta \neq 0$ و $c = 0$ به دست می آید. این خانواده پنج قطری مرتبه شش دارای ضرایب زیر می باشد:

$$\beta = \frac{1}{12}(-1 + 3\alpha), \quad a = \frac{2}{9}(8 - 3\alpha), \\ b = \frac{1}{18}(-17 + 57\alpha), \quad c = 0 \quad (2.12)$$

این خانواده در حد $\beta \rightarrow 0$ یا $\alpha = \frac{1}{4}$ به روش سه قطری مرتبه شش (۲.۸) تبدیل می‌گردد. ضریب اولین جمله مربوط به خطای قطع برای معادله (۲.۱۲) برای $\alpha = \frac{4}{9}$ صفر شده و روش به یک روش مرتبه هشت تبدیل می‌گردد. ضرایب مربوط به این معادله عبارتند از:

$$\alpha = \frac{4}{9}, \quad \beta = \frac{1}{36}, \quad a = \frac{40}{27}, \quad b = \frac{25}{54}, \quad c = 0 \quad (2.13)$$

با انتخاب $\beta = \frac{1}{40}(-3 + 8\alpha)$ در معادله (۲.۱۱) خانواده یک پارامتری پنج قطری از مرتبه هشت به دست می‌آید. ضرایب مربوط به این خانواده عبارتند از:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{40}(-3 + 8\alpha), \quad a = \frac{1}{6}(12 - 7\alpha) \\ b &= \frac{1}{150}(568\alpha - 183), \quad c = \frac{1}{50}(9\alpha - 4) \end{aligned} \quad (2.14)$$

روش‌های مرتبه هشت به خصوصی که تاکنون به دست آمدند (الف. روش (۲.۹) با $\alpha = \frac{4}{9}$ و ب. روش (۲.۱۳) متعلق به این خانواده یک پارامتری می‌باشند.

با انتخاب $\alpha = \frac{1}{4}$ در روش (۲.۱۴) یک روش مرتبه ده به دست می‌آید. این روش دارای بالاترین مرتبه دقت در بین روش‌هایی می‌باشد که توسط معادله (۲.۱) تعریف می‌شوند. ضرایب این روش عبارتند از:

$$\alpha = \frac{1}{4}, \quad \beta = \frac{1}{20}, \quad a = \frac{17}{12}, \quad b = \frac{101}{150}, \quad c = \frac{1}{100} \quad (2.15)$$

در این بخش روش فشرده را از نظر استنسبیل محاسباتی و خطای قطع مورد بررسی قرار دادیم، راه دیگر و کارآمدتر در بررسی روش‌هایی که در اینجا ارائه می‌شوند، تحلیل فوریه خطای آن‌ها می‌باشد. با استفاده از تحلیل فوریه می‌توان روش‌ها را از نظر قدرت تفکیک موج‌ها طبقه‌بندی نمود. همچنین تحلیل فوریه، امکان بهینه سازی یک روش از یک خانواده چند پارامتری را فراهم می‌نماید.

۲.۴ تحلیل فوریه خطا

در این بخش به تحلیل فوریه خطای تقریب‌های تفاضل محدود فشرده که در بخش‌های قبلی معرفی شدند می‌پردازیم. همچنین این روش را با روش‌های تفاضل مرکزی محدود دیگر مقایسه می‌نماییم، تا بهبودی حاصل در مشخصه‌های خطا را مورد قضاوت قرار دهیم. این روش، روشی کلاسیک برای مقایسه روش‌های عددی می‌باشد.

تحلیل فوریه روش موثری برای بررسی کمی مشخصات تفکیک کنندگی^۵ روش‌های تفاضل محدود می‌باشد. از این بررسی کمی می‌توان برای بهینه‌سازی روش نیز استفاده نمود. در این بخش

^۵Resolution

خطاهای گسسته‌سازی براساس خطاهای پخش یا خطای فاز مورد بررسی قرار می‌گیرند. در تمامی این مراحل مقایسه با سایر روش‌های عددی انجام می‌گیرد. مثال‌هایی از بهینه‌سازی براساس قدرت تفکیک‌پذیری نیز ارائه می‌گردد. تمامی روش‌هایی که برای نقاط داخلی شبکه در این فصل ارائه شده‌اند همگی از نوع مرکزی می‌باشند، بنابراین هیچ‌گونه خطای استهلاکی در آن‌ها وجود ندارد. بررسی خطاهای مرزی (برای مسائل غیرمتناوب) در بخش دیگری مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲.۴.۱ تحلیل فوریۀ روش فشرده

برای تحلیل فوریۀ خطا متغیرهای تابع را در بازه $[0, L]$ نسبت به متغیر مستقل، متناوب فرض می‌نماییم (به عبارت دیگر $f_1 = f_{N+1}$ و $h = L/N$ می‌باشد). متغیرهای تابع را می‌توان براساس ضرایب فوریۀ به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \sum_{k=-N/2}^{k=N/2} \hat{f}_k \exp\left(\frac{2\pi i k x}{L}\right) \quad (2.16)$$

در معادله بالا $i = \sqrt{-1}$ می‌باشد. از آنجایی که متغیرهای مستقل دارای مقادیر حقیقی می‌باشند، ضرایب فوریۀ در بازه $1 \leq k \leq N/2$ در رابطه $\hat{f}_k = \hat{f}_{-k}^*$ صدق می‌نمایند. همچنین، $\hat{f}_0 = \hat{f}_0^*$ است، که در آن * بیان‌کننده مزدوج مختلط می‌باشد.

برای راحتی از عدد موج و مختصات بدون بعد شده، به ترتیب $w = 2\pi kh/L = 2\pi K/N$ و $s = x/h$ استفاده می‌نماییم. مدهای فوریۀ براساس این متغیرها به‌صورت ساده $\exp(iws)$ می‌باشند. دامنه عدد موج بدون بعد، برابر $[0, \pi]$ است. مشتق تحلیلی مرتبه اول معادله (۲.۱۶) (نسبت به s) تابعی با ضرایب فوریۀ $\hat{f}'_k = iw \hat{f}_k$ تولید می‌نماید. خطای گسسته‌سازی مشتق مرتبه اول روش را می‌توان با مقایسه ضرایب فوریۀ مشتق که از روش گسسته‌سازی به‌دست آمده، $(\hat{f}'_k)_{fd}$ ، با ضرایب دقیق فوریۀ $\hat{f}'_k$ به‌دست آورد. برای روش‌های تفاضل مرکزی می‌توان نشان داد که $(\hat{f}'_k)_{fd} = iw' \hat{f}_k$ می‌باشد. عدد موج تغییر یافته $w'(w)$ عددی حقیقی است. هر روش تفاضل محدود دارای تابع به‌خصوصی از $w'(w)$ می‌باشد. مشتق‌گیری دقیق مربوط به خط صاف $w' = w$ است. روش‌های طیفی دارای $w' = w$ برای $w \neq \pi$ بوده و در $w = \pi$ برابر صفر می‌باشند. بازه اعداد موج $[2\pi/N, w_f]$ که در آن عدد موج $w'(w)$ مقدار مشتق دقیق $w'(w) = w$ را با خطای مشخصی تقریب می‌زند، مجموعه موج‌هایی را که به خوبی تفکیک شده معین می‌نماید. مقدار w_f (کوتاه‌ترین طول موج تفکیک شده) حتماً به بازه خطای ویژه در نظر گرفته شده بستگی خواهد داشت. منطقی است که این بازه خطا را برای مقایسه روش‌های مختلف تفاضل محدود ثابت در نظر بگیریم. همچنین بایستی توجه نمود که w_f تنها به نوع روش و نه به تعداد

نقاط N در نظر گرفته شده برای گسسته سازی بستگی خواهد داشت. در این بخش بازه خطا را به صورت زیر تعیین می‌نماییم:

$$\frac{|w'(w) - w|}{w} \leq \varepsilon \quad (2.17)$$

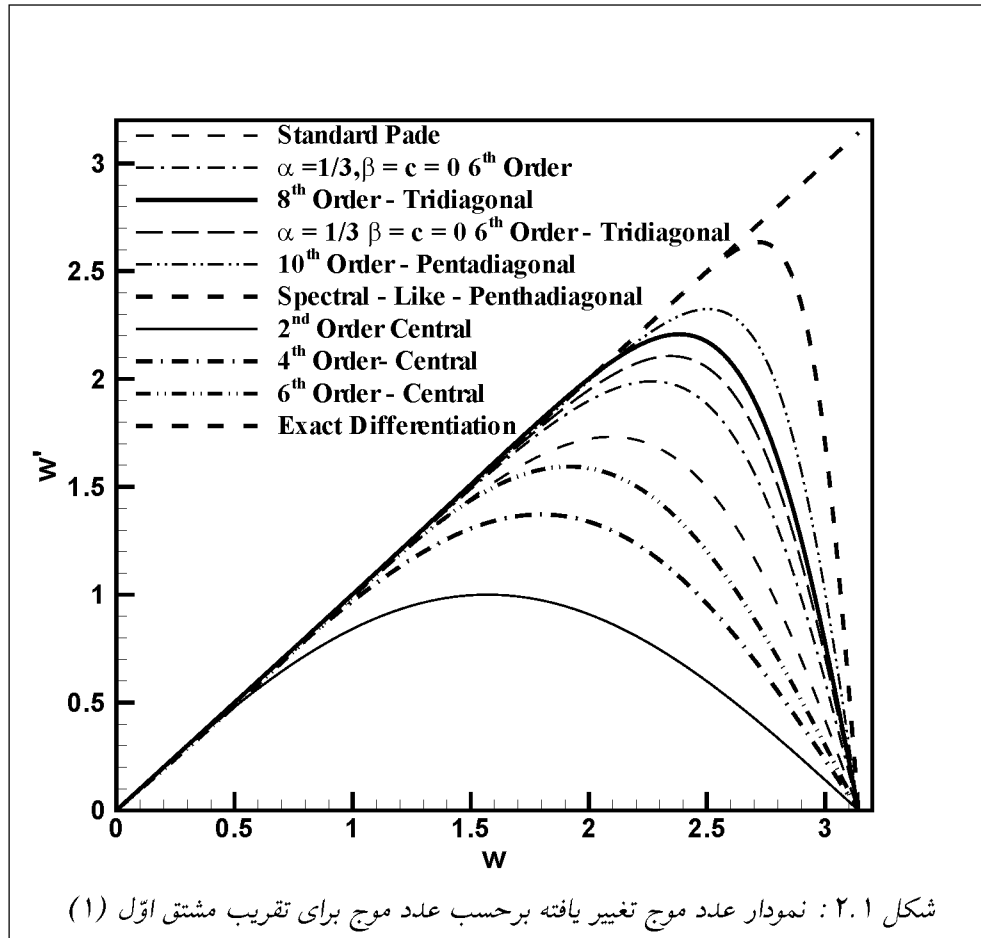
عبارت $r_1 \equiv 1 - w_f/\pi$ نمایش دهنده کسر موج‌هایی می‌باشد که به صورت خوبی تفکیک نشده‌اند. این کسر نیز مستقل از تعداد نقاط N می‌باشد. عبارت $e_1 \equiv w_f/\pi = 1 - r_1$ را می‌توان به عنوان معیاری از قدرت تفکیک‌کنندگی موج توسط یک روش در نظر گرفت. بازده محاسباتی یک روش متناسب با بازده تفکیک موج آن روش می‌باشد، اما به تعداد عملیات به کار رفته در آن روش و روش اعمال آن نیز بستگی خواهد داشت. تعداد عملیات به کار رفته در روش شبیه طیفی که بعداً در این بخش شرح داده خواهد شد، برابر $7N$ ضرب، N تقسیم و $7N$ جمع یا تفریق، وقتی که روش تحلیل ماتریس‌های تنک^۶ و روش تجزیه کولسکی^۷ برای قسمت متقارن آن (به شکل LDL^T) به کار رفته و برای عملیات بعدی ذخیره گردد، می‌باشد. برای روش‌های سه قطری تعداد عملیات $5N$ ، N ، $5N$ به ترتیب ضرب، تقسیم و جمع یا تفریق می‌باشد. روش تفاضل محدود (۲.۱) دارای عدد موج زیر می‌باشد:

$$w'(w) = \frac{a \sin(w) + (b/2) \sin(2w) + (c/3) \sin(3w)}{1 + 2\alpha \cos(w) + 2\beta \cos(2w)} \quad (2.18)$$

نموداری از اعداد موج تغییر یافته w' بر حسب w در شکل ۲.۱ نشان داده شده است. با این شیوه، مشخصات تفکیکی روش‌های مختلف را می‌توان با یکدیگر مقایسه نمود. از این نمودار، کسر r_1 ، که بیانگر کسری از موج‌هایی می‌باشد که به طور ضعیف تفکیک شده‌اند، و بازده تفکیک $e_1 = 1 - r_1$ را می‌توان مشخص نمود. این عمل برای سه مقدار متفاوت بازه خطای ε ، $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001$ انجام شده است. نتایج، مشخصه‌های تفکیکی روش‌ها را به صورت کمی مشخص می‌نماید که در جدول (۲.۲) نمایش داده شده‌اند. واضح است که در مقایسه با تفاضل‌های محدود مرکزی مرتبه شش و چهار، روش فشرده در بازه وسیع‌تری از اعداد موج نزدیک‌تر به خط مشتق دقیق قرار دارد. روش سه قطری مرتبه شش (۲.۸) از روش پاده استاندارد بهتر می‌باشد. به طریق مشابه روش‌های مرتبه هشت (۲.۹) با مقدار $\alpha = 3/8$ (۲.۱۲) و روش مرتبه ده (۲.۱۴)، در بازه وسیع‌تری از اعداد موج نسبت به مشتق دقیق نزدیک‌تر می‌باشند. همچنین می‌توان مشاهده نمود که بهبودی‌ای که در خطای پراکندگی برای بازه $(\pi/2, \pi)$ حاصل می‌شود، نسبت به خطای

^۶Sparse

^۷Cholesky Decomposition



قطع روش حساس نمی‌باشد. در شکل ۲.۱ یک روش شبیه طیفی که از معادله (۲.۱) به دست آمده است، نیز نشان داده شده است. این روش دارای دقت مرتبه چهار می‌باشد، اما دارای تفکیک بسیار بهتری می‌باشد. برای ایجاد این روش شبیه طیفی قیدهای زیر را اعمال می‌نماییم:

$$w'(w_1) = w_1, \quad w'(w_2) = w_2, \quad w'(w_3) = w_3 \quad (2.19)$$

روشی که در شکل ۲.۱ نشان داده شده است مربوط به $w_1 = 2/2$ ، $w_2 = 2/3$ و $w_3 = 2/4$ می‌باشد. پارامترهای آن عبارتند از:

$$\alpha = 0.5771439, \quad \beta = 0.896406, \\ a = 1.3025166, \quad b = 0.9935500, \quad c = 0.3750245 \quad (2.20)$$

هیچ تلاشی برای بهینه‌سازی مقادیر w_1, w_2, w_3 انجام نشده است. روش‌هایی که با مقادیر دیگر w_1, w_2, w_3 به دست می‌آیند نیز دارای مشخصات روش (۲.۲۰) می‌باشند. می‌توان یک روش از

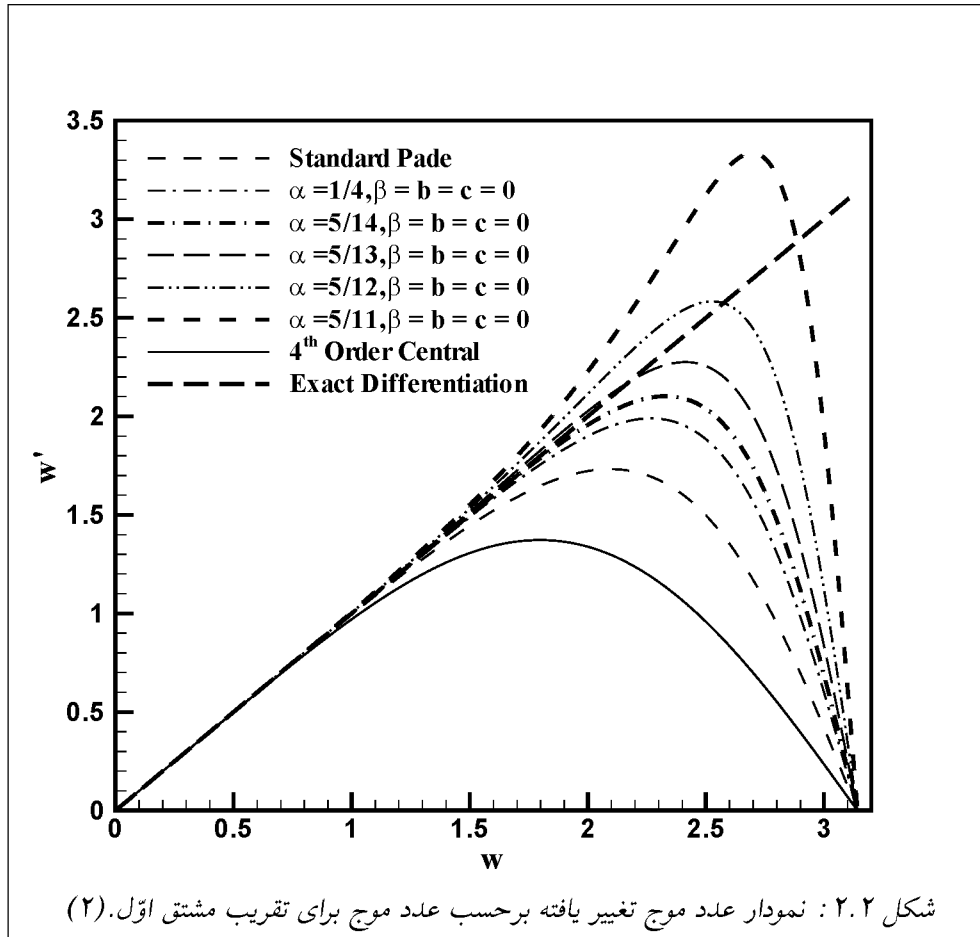
جدول ۲.۲: بازده تفکیک $e_1(\varepsilon)$ برای روش‌های مشتق اول نشان داده شده در شکل ۲-۱

روش	$\varepsilon = 0/001$	$\varepsilon = 0/01$	$\varepsilon = 0/1$
$2^{nd}Order - Central$	۰.۰۲	۰.۰۸	۰.۲۵
$4^{th}Order - Cenrtal$	۰.۱۳	۰.۲۳	۰.۴۴
$6^{th}Order - Cenrtal$	۰.۲۳	۰.۳۵	۰.۵۴
<i>StandarPade</i>	۰.۲۰	۰.۳۵	۰.۵۹
$6^{th}Order - \beta = c = 0, \alpha = 1/3$	۰.۳۵	۰.۵۰	۰.۷۰
$8^{th}Order - Tridiagonal$	۰.۴۴	۰.۵۸	۰.۷۵
$10^{th}Order - Pentadiagonal$	۰.۵۶	۰.۶۸	۰.۸۱
<i>Spectral - like - Pentadiagonal</i>	۰.۷۹	۰.۸۳	۰.۹۰

یک خانواده را (مثلاً براساس استنسیل محاسباتی سمت چپ و راست معادله (۲.۱)) بهینه نمود. این مسئله در شکل ۲.۲ برای روش‌های سه‌قطری که از معادله (۲.۷) به دست می‌آیند، نشان داده شده است. تقریب‌های مربوط به درصد موج‌هایی که به خوبی تفکیک نشده‌اند r_1 و بازده تفکیک e_1 در جدول ۲.۳ آورده شده‌اند. آشکار است، عضوی که دارای $\alpha = 5/14$ می‌باشد (روش مرتبه چهارم) دارای قابلیت تفکیک بهتری نسبت به روش مرتبه شش که با $\alpha = 1/3$ به دست می‌آید، می‌باشد. انتظار می‌رود که این مطلب خاصیت کلی تقریب‌های تفاضلی باشد. مثال‌های دیگری از این دست را در این فصل مشاهده خواهیم نمود. خصوصیات خطای پراکندگی را می‌توان به شکل خطا در سرعت فاز موج‌های با اعداد موج مختلف نمایش داد. می‌توانیم این مطلب را با درنظر گرفتن شکل نیمه گسسته شده (پیشروی دقیق زمانی) معادله جابه‌جایی زیر، نشان دهیم:

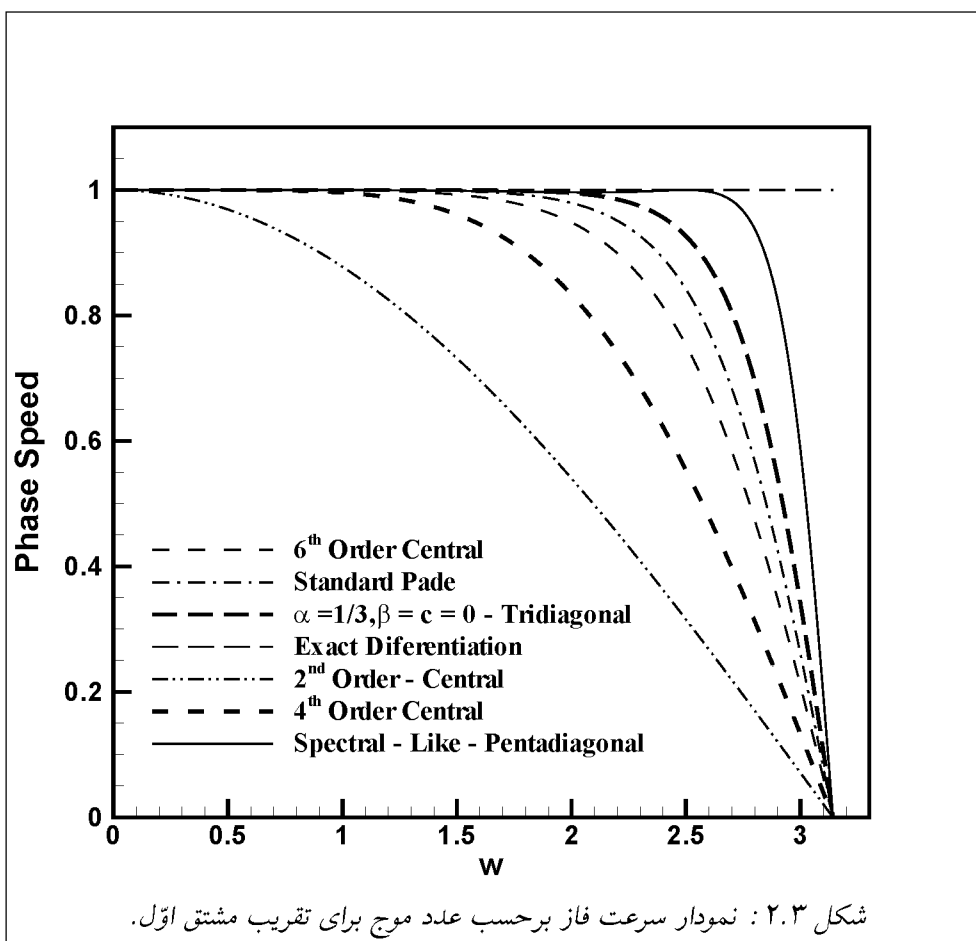
$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (2.21)$$

سرعت فاز برای موجی با عدد موج w به وسیله روش تفاضل محدود به صورت $(c_p)_{fd} = w'(w)/w$ بیان می‌شود. معادله با مشتقات جزئی (۲.۲۱) دارای یک سرعت فاز برای تمامی اعداد موج می‌باشد. بنابراین $(c_p)_{fd} - 1$ معیاری از خطای فاز می‌باشد. شکل ۲.۳ این اطلاعات را برای دسته‌ای از روش‌های تفاضل محدود نشان می‌دهد. بار دیگر برتری روش فشرده بر سایر روش‌ها مشهود می‌باشد. روش‌های شبیه طیفی را می‌توانیم از معادله (۲.۱) و بدون افزایش دقت در خطای



جدول ۲.۳: بازده تفکیک $e_1(\varepsilon)$ برای روش‌های مشتق اول نشان داده شده در شکل

روش			$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.001$
$4^{th}Order - Centarl$			۰.۴۴	۰.۲۳	۰.۱۳
<i>StandardPade</i>			۰.۵۹	۰.۳۵	۰.۲۰
$4^{th}Order - Tridiagonal, \alpha = 5/14$			۰.۷۴	۰.۵۹	۰.۵۲
$4^{th}Order - Tridiagonal, \alpha = 5/13$			۰.۷۹	۰.۴۶	۰.۲۴
$4^{th}Order - Tridiagonal, \alpha = 5/12$			۰.۸۶	۰.۳۹	۰.۲۱
$4^{th}Order - Tridiagonal, \alpha = 5/11$			۰.۶۱	۰.۳۵	۰.۲۰



قطع، به دست آوریم.

۲.۵ مرزهای غیرمتناوب

در بسیاری از مسائل ناچاریم تا از مرزهای غیرتناوبی در حل استفاده نماییم. در این بخش به ارائه روش‌های گسسته‌سازی مشتق مرتبه اول در گره‌های مرزی به روش فشرده می‌پردازیم. همچنین خطای محلی‌ای که ناشی از این تقریب می‌باشد را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این تحلیل با بررسی عددی خطای کلی^۸ همراه خواهد بود. این به این دلیل است که معمولاً خطا در مرزها بر روی خطا کلی تاثیر می‌گذارد.

^۸Global Error

۲.۵.۱ فرمولاسیون مشتق مرتبه اول در مرزها

مشتق اول در مرز $i = 1$ را می‌توان با رابطه‌ای به صورت زیر بیان نمود:

$$f'_1 + \alpha f'_2 = \frac{1}{h}(af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4) \quad (2.22)$$

این معادله با معادله (۲.۱) که برای نقاط داخلی نوشته شده است، بایستی به صورت توأم حل شود. اگر قرار باشد تا معادله (۲.۲۲) حداقل دارای دقت مرتبه دو باشد، با استفاده از این قید، ضرایب این روش به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$a = -\frac{3 + \alpha + 2d}{2}, \quad b = 2 + 3d, \quad c = -\frac{1 - \alpha + 6d}{2} \quad (2.23)$$

اگر مرتبه‌های بالاتری از دقت عددی مورد نیاز باشد، روش‌های مرتبه سه و چهار را می‌توان به دست آورد. ضرایب این روش‌ها به صورت زیر می‌باشند:

$$a = -\frac{11 + 2\alpha}{6}, \quad b = \frac{6 - \alpha}{2}, \quad c = \frac{2\alpha - 3}{2}, \quad d = \frac{2 - \alpha}{6} \quad (\text{مرتبه سه}) \quad (2.24)$$

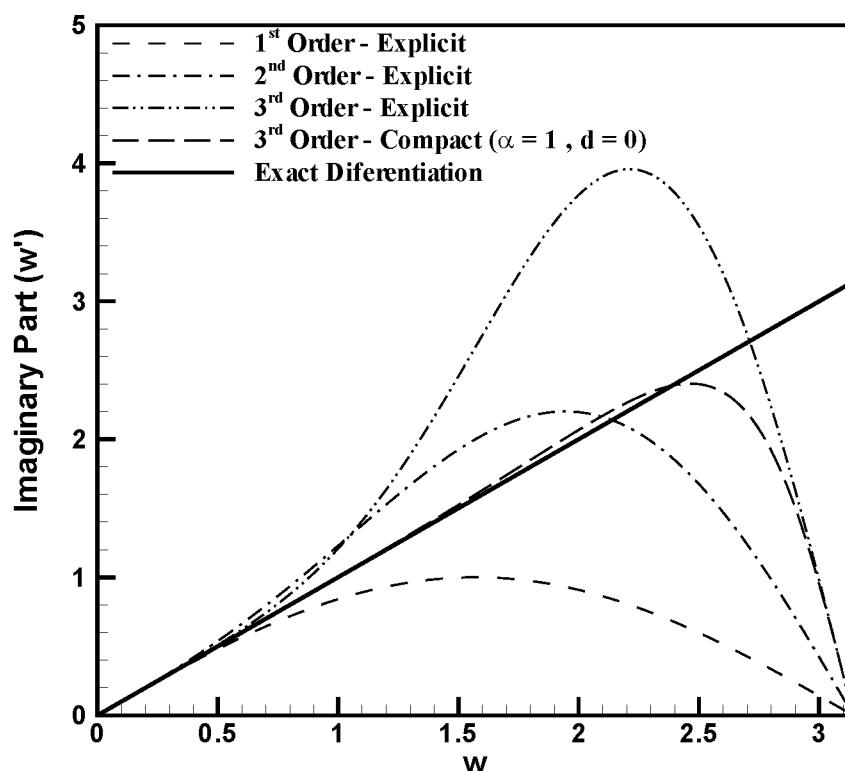
$$\alpha = 3, \quad a = -\frac{17}{6}, \quad b = \frac{3}{2}, \quad c = \frac{3}{2}, \quad d = -\frac{1}{6} \quad (\text{مرتبه چهار}) \quad (2.25)$$

جمله اول در خطای قطع (در سمت راست معادله (۲.۲۲)) برای این تقریبات مرزی برای روش مرتبه دو برابر $(2 - \alpha - 6d)/3! h^2 f^{(3)}_1$ و برای روش مرتبه سه $2(\alpha - 3)/4! h^3 f^{(4)}_1$ و برای روش مرتبه چهار برابر $(6/5!) h^4 f^{(5)}_1$ می‌باشد. بایستی توجه نمود که برای روش‌های مرتبه زوج جمله اول مربوط به خطای قطع از نوع خطای پراکندگی می‌باشد، در حالی که برای روش‌های مرتبه سه از نوع استهلاکی می‌باشد.

همانطور که در بخش تحلیل فوریه خطا مورد بحث قرار گرفت. تحلیل فوریه خطا، مشخصات تفکیکی موج را برای روش‌ها مشخص می‌نماید. در بخش بعدی تقریب‌های مختلف مرزی را از این دیدگاه مورد بررسی قرار می‌دهیم.

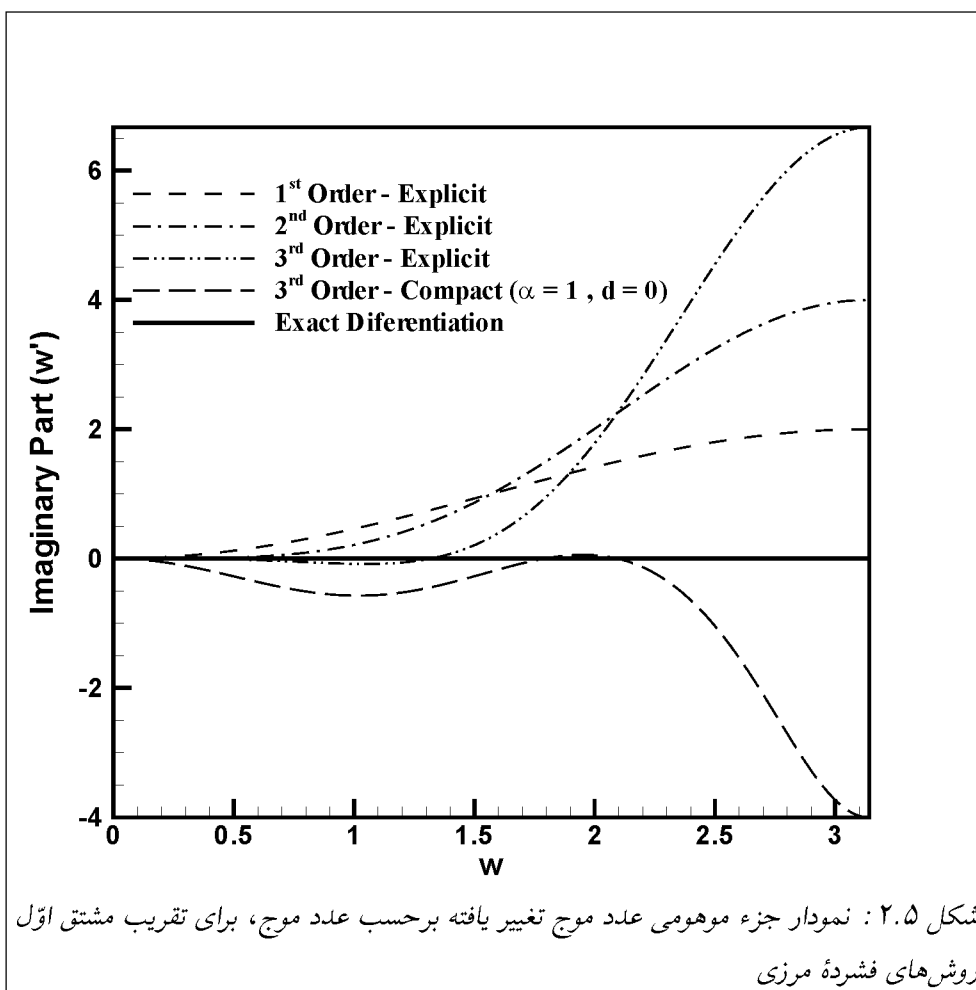
۲.۵.۲ تحلیل فوریه خطا برای فرمولاسیون فشرده در مرزها

عدد موج تغییر یافته w' مربوط به معادله (۲.۲۲) در حالت کلی به صورت مختلط می‌باشد. قسمت حقیقی w'_r که با w'_r نمایش داده می‌شود مربوط به خطای پراکندگی بوده و قسمت موهومی w'_i ، مربوط به خطای استهلاکی می‌گردد. در شکل‌های ۲.۴ و ۲.۵ قسمت‌های حقیقی و موهومی w' برای تقریب‌های مختلف مرزی نمایش داده شده‌اند. قابل توجه است که افزایش دقت تقریب‌های



شکل ۲.۴: نمودار جزء حقیقی عدد موج تغییر یافته برحسب عدد موج، برای تقریب مشتق اول روش‌های فشرده مرزی

صریح خطای استهلاکی را در بازه اعداد موج کوچک تا متوسط کاهش می‌دهد، در حالی که خطای پراکندگی برای طول موج‌های متوسط را افزایش می‌دهد. روش مرتبه دوم فشرده (۲.۲۳) در شکل نشان داده نشده است) با $\alpha = 1$ و $d = 0$ کاملاً غیر استهلاکی می‌باشد ($w'_i = 0$). خطای قطع آن نیز (برای محاسبه f'_i) برابر $1/4$ مقدار مشابه در شکل تفاضل محدود مرتبه دوم معمول می‌باشد. اما در $w = \pi$ ، w'_r آن تکین می‌باشد. بنابراین برای استفاده در مسائل مناسب نمی‌باشد. روش فشرده مرتبه سه (۲.۲۴) با $\alpha = 2$ ($d = 0$)، همانطور که در شکل نشان داده شده است، دارای خطای پراکندگی بسیار کوچکی است. خطای قطع آن (برای محاسبه f'_i)، $1/9$ برابر تفاضل محدود مرتبه سه صریح می‌باشد. خطای استهلاکی آن نیز محدود به اعداد موج بزرگ می‌باشد. سایر اعضا (۲.۲۴) که در نمودارها نمایش داده نشده‌اند، دارای خطای استهلاکی کمتر اما خطای پراکندگی بیشتر می‌باشند.



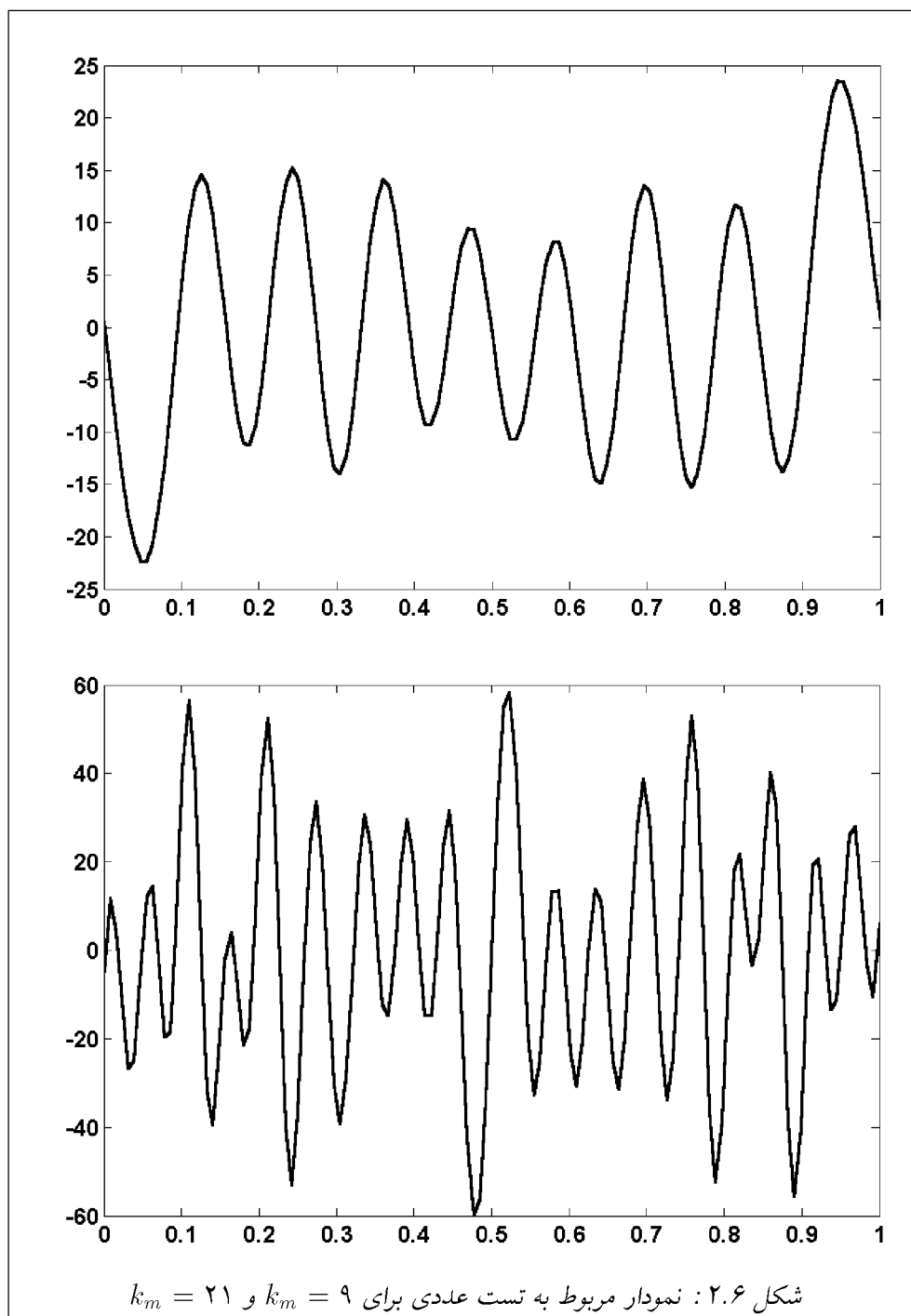
همچنین قابل ذکر است که برای بسیاری از روش‌های فشرده در مرزها که در این جا توضیح داده شد، w'_i دارای علامتی برخلاف علامت به دست آمده برای فرمول‌های مرزی مربوط به روش‌های صریح یک‌طرفه می‌باشد. برای روش مرتبه دو که توسط معادله (۲.۲۳) تعریف می‌گردد، می‌توان نشان داد که $w'_i(w = \pi) = 4(2d + 1)/(1 - \alpha)$ می‌باشد. بنابراین برای روش‌های صریح مرزی مرتبه یک، دو و سه ($\alpha = 0$)، مقادیر $w'_i(\pi)$ برابر ۲، ۴ و $20/3$ می‌باشد، در حالی که برای روش‌های فشرده نشان داده شده در شکل این مقدار برابر ۴- می‌باشد. البته نمی‌توان از آنچه تا کنون در مورد رفتار این روش‌های مرزی (که تاکنون توضیح داده شد) گفته شد، به‌طور قطعی نسبت به تاثیر آن‌ها در پایداری کلی نظر داد. بلکه بایستی پایداری کامل روش‌های عددی را با تحلیل مقادیر ویژه آن‌ها مشخص نمود. این نوع تحلیل مقدار ویژه‌ای نیاز به حل عددی دارد. این تحلیل نشان می‌دهد که روش‌های مرزی نشان داده شده در این قسمت به حل‌های عددی پایدار

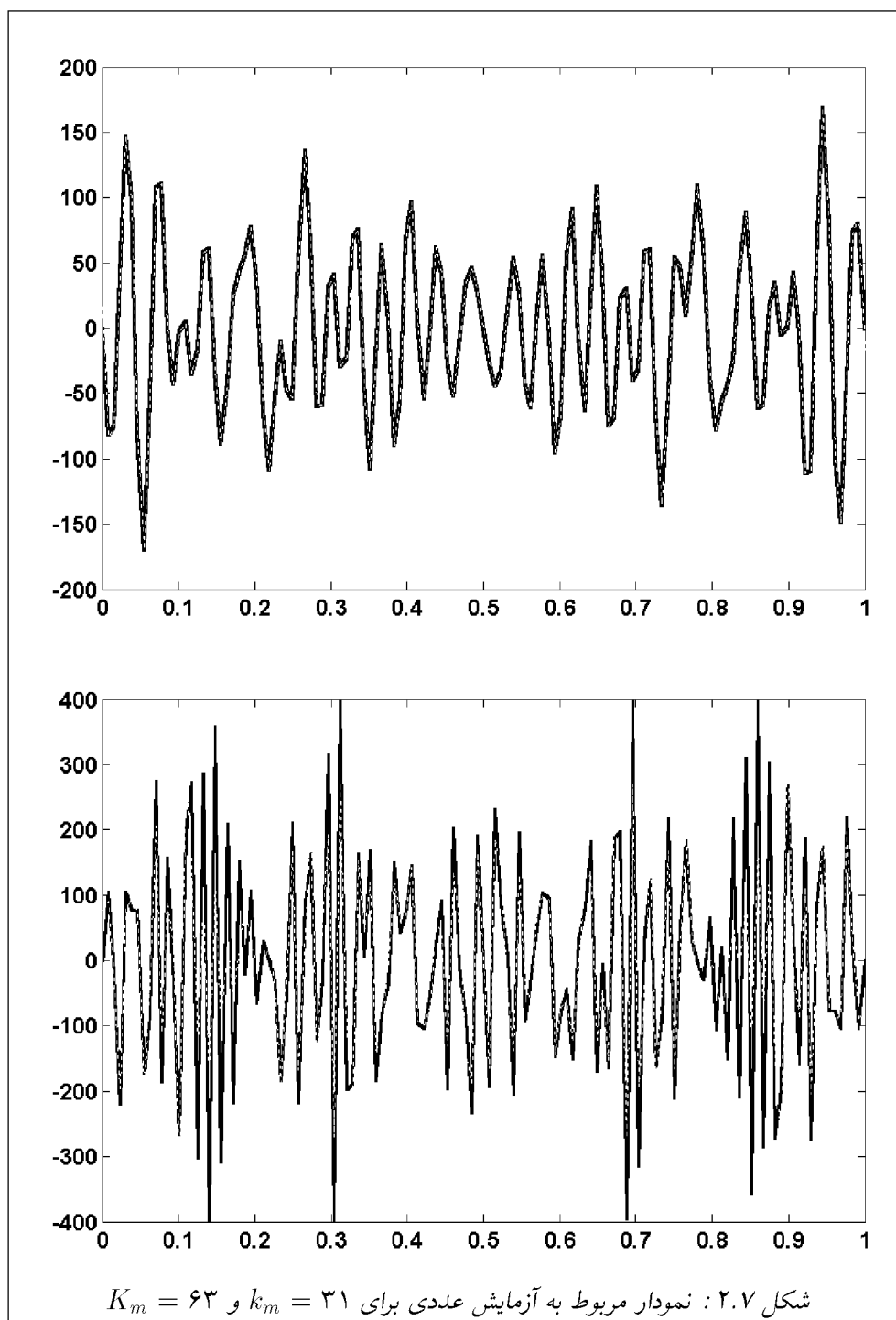
منتهی می‌گردند.

۲.۶ آزمایش‌های عددی

برای مسائل با شرایط مرزی متناوب، تحلیل فوریۀ ارائه شده در بخش‌های قبلی را می‌توان برای ارزیابی خطای کلی به‌کار برد. البته از این روش برای سایر شرط‌های مرزی نمی‌توان استفاده نمود. خطای کلی را در این حالات می‌توان با آزمایش‌های مستقیم عددی ارزیابی نمود. یک چنین آزمایشی را می‌توان در سطوح مختلفی انجام داد. ساده‌ترین این آزمایش‌ها، مقایسۀ مشتق عددی محاسبه شده با مشتق‌های معلوم توابع مختلف می‌باشد. برای بررسی روش بر روی تابعی که دارای بازۀ وسیعی از مقیاس‌ها می‌باشد، تابعی را که با جمع بستن مودهای مختلف فوریه (قابل نمایش بر روی شبکه) که به شکل مصنوعی تولید می‌شود، در نظر می‌گیریم. فازهای مودهای فوریه به صورت کاملاً تصادفی انتخاب شده و دامنه‌های آن‌ها برابر یک انتخاب شده‌اند. برای مثال‌هایی که در این‌جا آورده شده است، بازۀ $[0, 1]$ به ۱۲۸ قسمت مساوی (۱۲۹ نقطه با نقاط انتهایی) تقسیم شده‌است. با این شبکه، مودهای فوریه $[0, 63]$ (برای عدد موج k در معادله (۲.۱۶)) را می‌توان نمایش داد (مود $k = 64$ را در نظر نگرفته‌ایم). برای مثال‌هایی که توضیح خواهیم داد، مودهای فوریه، با عدد k در بازۀ $[0, k_m]$ در نظر گرفته شده‌اند. دامنه‌های مودهای فوریه، مساوی و فازهای آن‌ها به صورت تصادفی (موج سفید^۹) در نظر گرفته شده‌اند. برای آزمایش عددی، مشتق اول از روش (۲.۸) با $\alpha = 1/3$ و $\beta = 0 = c$ و در نقاط انتهایی از روش فشرده مرزی مرتبۀ سه با $d = 0$ استفاده شده‌است. در شکل‌های ۲.۶ و ۲.۷ آزمایش‌های عددی این روش برای چهار دسته از توابع (با k_m متغیر ۳۱، ۲۱، ۹ و ۶۳) نشان داده شده‌است. در شکل ۲.۶ تابعی که به صورت تصادفی تولید شده نیز، نمایش داده شده و در شکل ۲.۷ مشتق عددی محاسبه شده به همراه مقدار دقیق آن نیز آورده شده‌است. قابل ذکر است که خطای غالب در مرزها اتفاق می‌افتد. تنها در مورد حالت k_m برابر ۳۱ و ۶۳ این خطای محلی بر روی نمودارها قابل مشاهده می‌باشد. حتی در این حالت‌ها نیز نواحی داخلی به صورت قابل قبولی بدون خطا می‌باشند.

^۹ White Noise





۲.۷ تحلیل مقدار ویژه‌ای برای روش فشرده

در این بخش به بررسی مقادیر ویژه برای مشتق اول با گسسته‌سازی به صورت کامل می‌پردازیم. یک چنین بررسی‌ای برای اطمینان از پایداری عددی کلی روش لازم است. رابطه زیر را بر روی بازه $[0, 1]$ و شرایط مرزی $f(x=0, t)=0$ در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (2.26)$$

برای بررسی حاضر این شرط مرزی باعث نمی‌شود تا از عمومیت مسئله کاسته شود. دامنه را به N قسمت مساوی تقسیم می‌نماییم. مشتق $\frac{\partial f}{\partial x}$ در رابطه (۲.۲۶) را با استفاده از روابطی که در این فصل مطالعه نمودیم، ارزیابی می‌نماییم. این عملیات خطی را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$A\hat{f}' = \frac{1}{\Delta x} B\hat{f} \quad (2.27)$$

در معادله بالا A و B ماتریس‌های تنک $N \times N$ ^{۱۰} بوده و $\hat{f}'$ و بردارهای N تایی به ترتیب از مقادیر تابع و مشتقات آن در گره‌های $x_i = i/N$ می‌باشند. با ضرب نمودن شکل گسسته‌سازی شده معادله (۲.۲۶) (از نظر مکانی) در ماتریس A و جایگذاری در معادله (۲.۲۷) داریم:

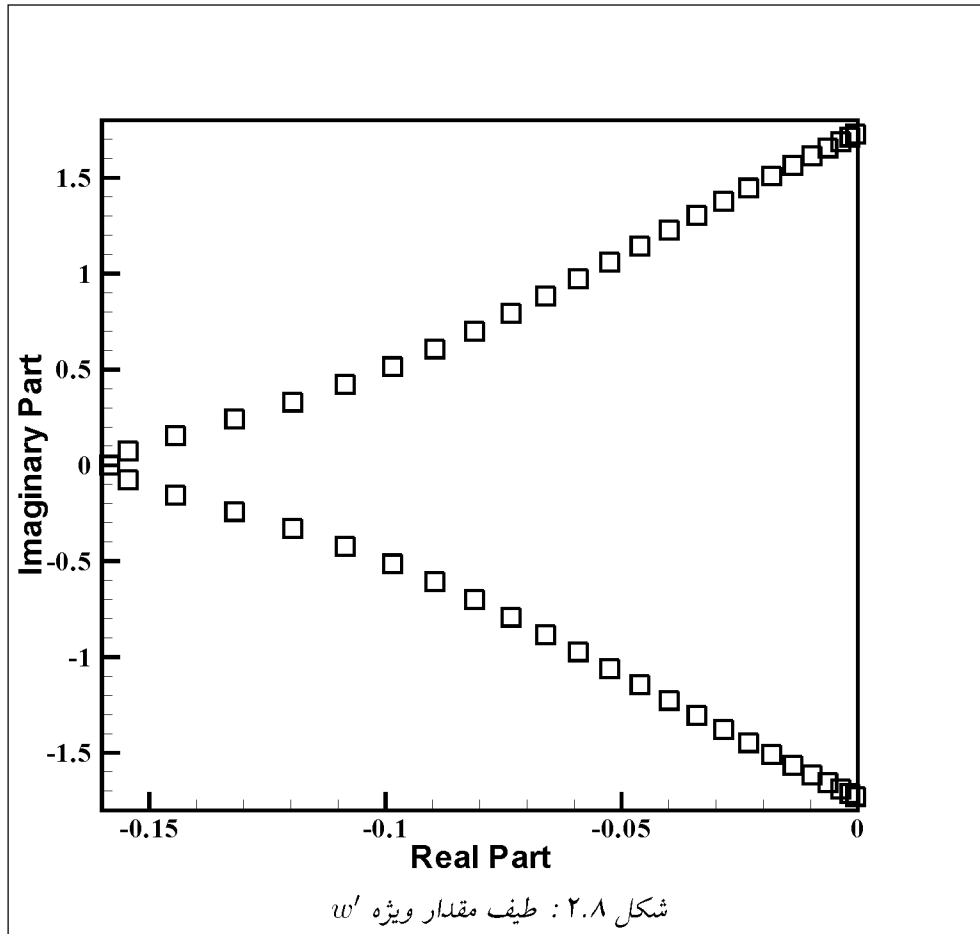
$$A \frac{d\hat{f}}{dt} = -\frac{c}{\Delta x} B\hat{f} \quad (2.28)$$

در معادله بالا، $d\hat{f}/dt$ برداری N تایی از مشتق زمانی مقادیر گره‌ای می‌باشد. از آنجایی که معادله (۲.۲۸) یک دستگاه معادلات معمولی در زمان و با ضرایب ثابت می‌باشد، حل عمومی آن به صورت $\hat{f} = \exp(wt)\tilde{f}$ می‌باشد. معادله (۲.۲۸) را به صورت مسئله مقدار ویژه زیر می‌نویسیم:

$$-\frac{w\Delta x}{c} A\tilde{f} = B\tilde{f} \quad (2.29)$$

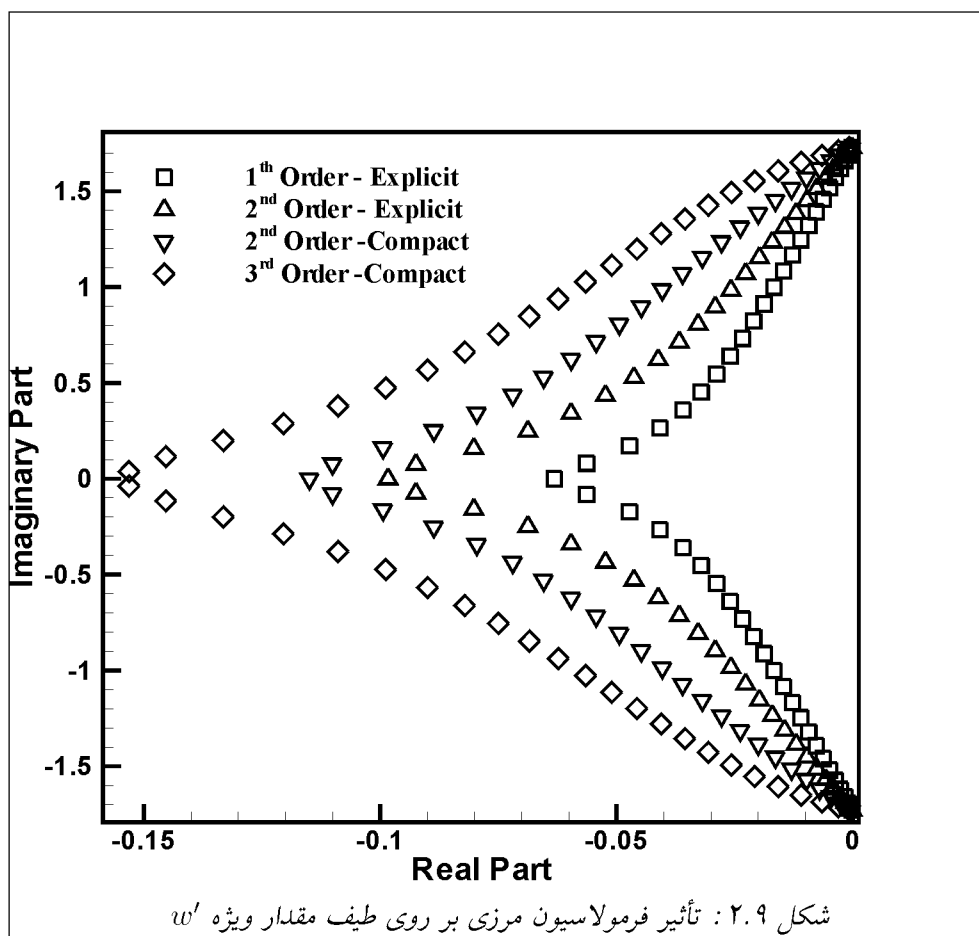
در معادله بالا، $w' = w\Delta x/c$ مقدار ویژه می‌باشد. مقدار ویژه w' یا w در حالت کلی به صورت مختلط می‌باشد و به اندازه ماتریس (N) بستگی دارد. برای پایداری عددی کلی روش گسسته‌سازی، بایستی تا تمام مقادیر ویژه معادله (۲.۲۹) در نیمه چپ صفحه مختلط قرار گیرند. بایستی توجه نمود که در این بررسی از خطای گسسته‌سازی زمانی صرف‌نظر نموده‌ایم. اما در حالت کلی نیز بررسی پایداری مانند آنچه در بالا آورده شد می‌باشد. مقادیر ویژه برای روش سه قطری (۲.۷) به همراه

^{۱۰}Sparse



حالت پایستار و غیر پایستار گسسته‌سازی مرزی و همچنین حالت صریح گسسته‌سازی مرزی در نظر گرفته شده‌است. در تمام شرایط در نظر گرفته شده، مقادیر ویژه معادله (۲.۲۹) شرط پایداری را برآورده می‌نمایند. در شکل ۲.۸، قسمت حقیقی کوچکترین مقدار ویژه w' ، با رابطه N^{-3} با افزایش N تغییر می‌کند. این رفتار مجانبی تا مقدار N برابر ۲۰۰ مشاهده می‌گردد. تنها مورد مغایرت با رابطه N^{-3} برای روش استاندارد پاده است. این روش، زمانی که با گسسته‌سازی مرزی مرتبه دوم فشرده ($\alpha = 4$ و $d = -1/2$ که $w'_i(\pi) = 0$ است)، همراه می‌شود دارای مقدار ویژه صفر می‌گردد. در حالی که این گسسته‌سازی مرزی با سایر روش‌ها این رفتار را ندارد.

رفتار مقدار ویژه w' که دارای منفی‌ترین جزء حقیقی می‌باشد، به روشی که برای گسسته‌سازی نقاط داخلی استفاده می‌نماییم بستگی دارد. برای روش استاندارد پاده، این مقدار ویژه کندتر از N^{-1} به سمت صفر میل می‌کند (با هر نوع گسسته‌سازی در مرزها). روش‌های مرتبه دو با $\log N/N$ متناسب می‌باشند. برای سایر اعضای خانواده معادله (۲.۷) این مقدار ویژه وقتی N زیاد می‌گردد



ثابت باقی می‌ماند (با هر نوع گسسته سازی مرزی). در این حالت در نزدیکی این مقادیر ویژه، مقادیر ویژه اضافه دیگری نیز (در نزدیکی مقدار ویژه دارای منفی‌ترین جزء حقیقی) وجود دارند، که آن‌ها نیز ثابت باقی می‌مانند. در تمامی این شرایط، مقادیر ویژه در ناحیه پایدار باقی می‌مانند. در شکل ۲.۹، تأثیر تغییر در روش گسسته‌سازی مرزی با ثابت نگه‌داشتن شرایط داخلی (روش استاندارد پاده)، بر روی طیف مقادیر ویژه نمایش داده شده است. قابل توجه است که با افزایش مرتبه روش استفاده شده در گسسته‌سازی مرزی مقادیر ویژه به سمت مقادیر منفی‌تر میل می‌نماید.

۲.۸ روش فشرده برای شبکه‌های مرکز سلولی

در این بخش از روش تفاضل محدود فشرده بر روی یک شبکه مرکز-سلولی^{۱۱} استفاده خواهیم نمود. در فرمولاسیونی که ارائه خواهد شد، گره‌هایی که در آن‌ها مقدار مشتق محاسبه می‌گردد، به اندازه $h/2$ نسبت به گره‌هایی که در آن‌ها مقدار تابع محاسبه می‌گردد، جابه‌جا شده‌اند. یک چنین شبکه‌ای را در تحلیل‌های حجم محدود مشاهده می‌نماییم. همانطور که در زیر نشان داده می‌شود، در شبکه‌های مرکز سلولی روش‌های فشرده دارای مشخصات تفکیکی موج بهتری برای اعداد موج (w) نزدیک نقطه π نسبت به روش‌هایی که تاکنون توضیح داده شد، می‌باشند. همچنین قابل ذکر است که استفاده از روش فشرده بر روی شبکه‌های مرکز سلولی برای مشتق‌گیری نیازمند استفاده از روش‌های میانبایی دقیقی می‌باشد. در بخش‌های بعدی روش‌های فشرده را برای میانبایی توضیح خواهیم داد. خواص تفکیک موج روش میانبایی در ترکیب با خواص مشتق‌گیری‌ها در شبکه‌های مرکز-سلولی، مشخصات تفکیکی موج کلی روش را معین می‌نماید.

۲.۸.۱ مشتق اول بر روی شبکه مرکز-سلولی

با تقریبی به‌صورت زیر بحث را آغاز می‌نماییم:

$$\begin{aligned} \beta f'_{i-2} + \alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} + \beta f'_{i+2} \\ = c \frac{f_{i+5/2} - f_{i-5/2}}{5h} + b \frac{f_{i+3/2} - f_{i-3/2}}{3h} \\ + a \frac{f_{i+1/2} - f_{i-1/2}}{h} \end{aligned} \quad (2.30)$$

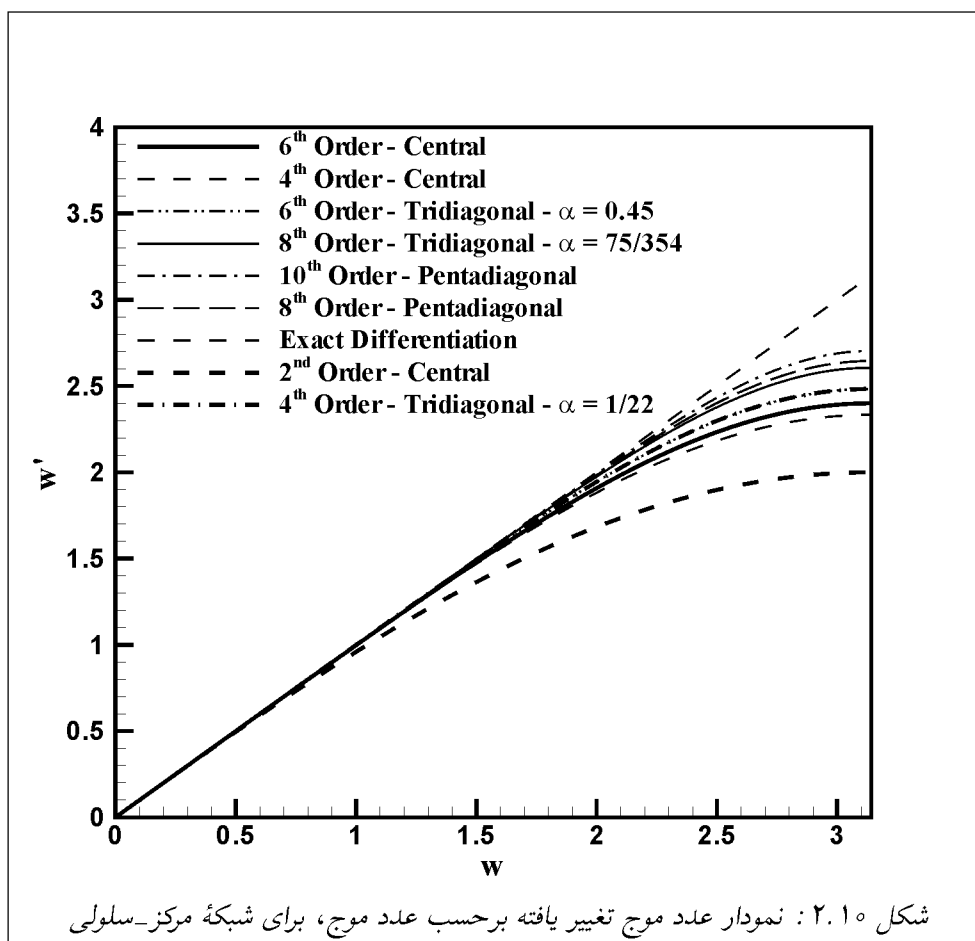
قیدهایی که بر روی ضرایب اعمال می‌گردند با تطابق ضرایب بسط سری تیلور (حداقل تا مرتبه چهار)، به‌دست می‌آیند. روش‌های سه‌قطری متناظر با روش استاندارد پاده با قرار دادن $\beta = 0$ و $c = 0$ به‌دست می‌آیند. این روش‌ها که از مرتبه چهار هستند، دارای ضرایب زیر می‌باشند:

$$\beta = 0, \quad a = \frac{3}{8}(3 - 2\alpha), \quad b = \frac{1}{8}(22\alpha - 1) \quad (2.31)$$

خطای قطع (در سمت راست معادله (2.30)) به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{9 - 62\alpha}{1920} h^4 f^{(5)}$$

برای $\alpha = 1/22$ ، ضریب b حذف می‌گردد و فشرده‌ترین روش را تولید می‌نماید. برای $\alpha = 9/62$



یک روش مرتبه شش سه قطری به دست می‌آید. این روش تفاضل محدود مرتبه شش در بازه گسترده‌ای از اعداد موج دارای خطای گسسته‌سازی کوچکی می‌باشد. نموداری از عدد موج تغییر یافته که مشخصه تفکیکی موج برای هر روش را نمایش می‌دهد، در شکل (۲.۱۰) آورده شده است. در شکل، روش‌های مرتبه بالا مانند روش (۲.۳۰) نیز نشان داده شده است. همانطور که انتظار می‌رود روش‌های مرکز-سلولی نسبت به سایر روش‌های با شبکه‌های یکنواخت (۲.۱) دارای خطای گسسته‌سازی کمتری می‌باشند. روش مرتبه شش سه قطری ($\alpha = 9/62$) (۲.۳۱) بسیار به مشتق دقیق نزدیک می‌باشد. با قرار دادن $\beta \neq 0$ و $c \neq 0$ حتی نتایج بهتری می‌توانیم به دست آوریم. بار دیگر قابل مشاهده است که در طول موج‌های بلند قدرت تفکیک نسبت به خطای قطع روش حساس نمی‌باشد.

ضرایب روش‌های مرتبه بالاتر و خطای قطع آن‌ها در جدول ۲.۴ آورده شده است.

جدول ۲.۴: روش‌های مشتق مرتبه اول برای شبکه‌های مرکز-سلولی

خطای قطع	پارامترها
$\frac{1}{192}(-62\alpha + 1618\beta - 38c + 9)h^4 f^{(5)}$	$a = \frac{1}{\lambda}(9 - 6\alpha - 78\beta + 16c)$ $b = \frac{1}{\lambda}(-1 + 22\alpha + 94\beta - 24c)$
$\frac{75-354\alpha+2614\beta}{107520}h^6 f^{(7)}$	$a = \frac{225-206\alpha-254\beta}{192}$ $b = \frac{414\alpha-114\beta-25}{128}$ $c = \frac{9-62\alpha+1618\beta}{384}$
$\frac{96850-288529\alpha}{1686343680}h^8 f^{(9)}$	$\beta = \frac{354\alpha-75}{2614}$ $a = \frac{37950-39275\alpha}{31368}$
$\frac{939109}{818997645312}h^{10} f^{(11)}$	$b = \frac{65115\alpha-3550}{20912}$ $c = \frac{25669\alpha-6114}{62736}$ $\beta = \frac{9675}{577058}, \alpha = \frac{96850}{288529}$ $a = \frac{683425}{865587}, b = \frac{505175}{577058}$ $c = \frac{69049}{1731174}$

۲.۹ روش‌های فشرده برای میانبایی و فیلتر

از روش‌های فشرده می‌توانیم برای میانبایی و فیلتر استفاده نماییم. در این بخش به بررسی روش فشرده برای میانبایی و فیلترهای عددی می‌پردازیم. برای این ارزیابی از تحلیل فوریه استفاده خواهیم نمود. انتظار داریم تا روش فشرده این امکان را به ما بدهد تا بتوانیم کنترل بیشتری بر روی توابع تبدیل مورد استفاده در فیلترها و میانبایی عددی داشته باشیم.

۲.۹.۱ میانبایی به روش فشرده

با میانبایی به صورت زیر شروع می‌نماییم:

$$\begin{aligned} \beta \hat{f}_{i-2} + \alpha \hat{f}_{i-1} + \hat{f}_i + \alpha \hat{f}_{i+1} + \beta \hat{f}_{i+2} \\ = \frac{c}{4}(\hat{f}_{i+5/2} + \hat{f}_{i-5/2}) + \frac{b}{4}(\hat{f}_{i+3/2} + \hat{f}_{i-3/2}) \\ + \frac{a}{4}(\hat{f}_{i+1/2} + \hat{f}_{i-1/2}) \end{aligned} \quad (2.32)$$

در معادله بالا $\hat{f}_i$ نشان‌دهنده مقادیر میانبایی شده در نقطه x_i می‌باشد، روش‌های با دقت‌های متفاوت را می‌توانیم با مطابقت دادن ضرایب سری فوریه از مرتبه‌های مختلف به دست آوریم. به عنوان نمونه میانبایی با دقت مرتبه چهار را به دست می‌آوریم. معادله تبدیل مربوط به معادله (۲.۳۲) به صورت زیر می‌باشد:

$$T(w) = \frac{a \cos(w/2) + b \cos(3w/2) + c \cos(5w/2)}{1 + 2\alpha \cos(w) + 2\beta \cos(2w)} \quad (2.33)$$

از این تبدیل برای بهینه‌سازی روش‌ها استفاده می‌نماییم.

خانواده مرتبه چهار (با سه پارامتر) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{8}(9 + 10\alpha - 14\beta + 16c) \\ b &= \frac{1}{8}(-1 + 6\alpha + 30\beta - 24c) \end{aligned} \quad (2.34)$$

خطای قطع مربوط به این خانواده (سمت راست معادله (۲.۳۲)) به همراه سایر روش‌ها در جدول ۲.۵ نشان داده شده است. خانواده دو پارامتری مرتبه شش به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{64}(75 + 70\alpha - 42\beta) & b &= \frac{1}{128}(-25 + 126\alpha + 270\beta) \\ c &= \frac{1}{128}(3 - 10\alpha + 70\beta) \end{aligned} \quad (2.35)$$

جدول ۲.۵: خطای قطع برای روش میانمایی

روش	بزرگترین اندازه استنسیل چپ	بزرگترین اندازه استنسیل راست	خطای قطع در معادله (۲.۳۲)
(۲.۳۵)	۵	۶	$\frac{1}{138}(3 - 10\alpha + 70\beta - 128c)h^4 f^{(4)}$
(۲.۳۵)	۵	۶	$\frac{1}{1024}(5 - 14\alpha + 42\beta)h^6 f^{(6)}$
(۲.۳۶)	۵	۶	$\frac{10-21\alpha}{28672}h^8 f^{(8)}$
(۲.۳۷)	۵	۶	$\frac{1}{258048}h^{10} f^{(10)}$

این خانواده را می‌توان به یک خانواده مرتبه هشت یک پارامتری به صورت زیر تبدیل نمود:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{14\alpha - 5}{42} & a &= \frac{7\alpha + 10}{8} \\ b &= \frac{189\alpha - 50}{112} & c &= \frac{5\alpha - 2}{48} \end{aligned} \quad (2.36)$$

و همچنین به یک روش تک پارامتری مرتبه ده:

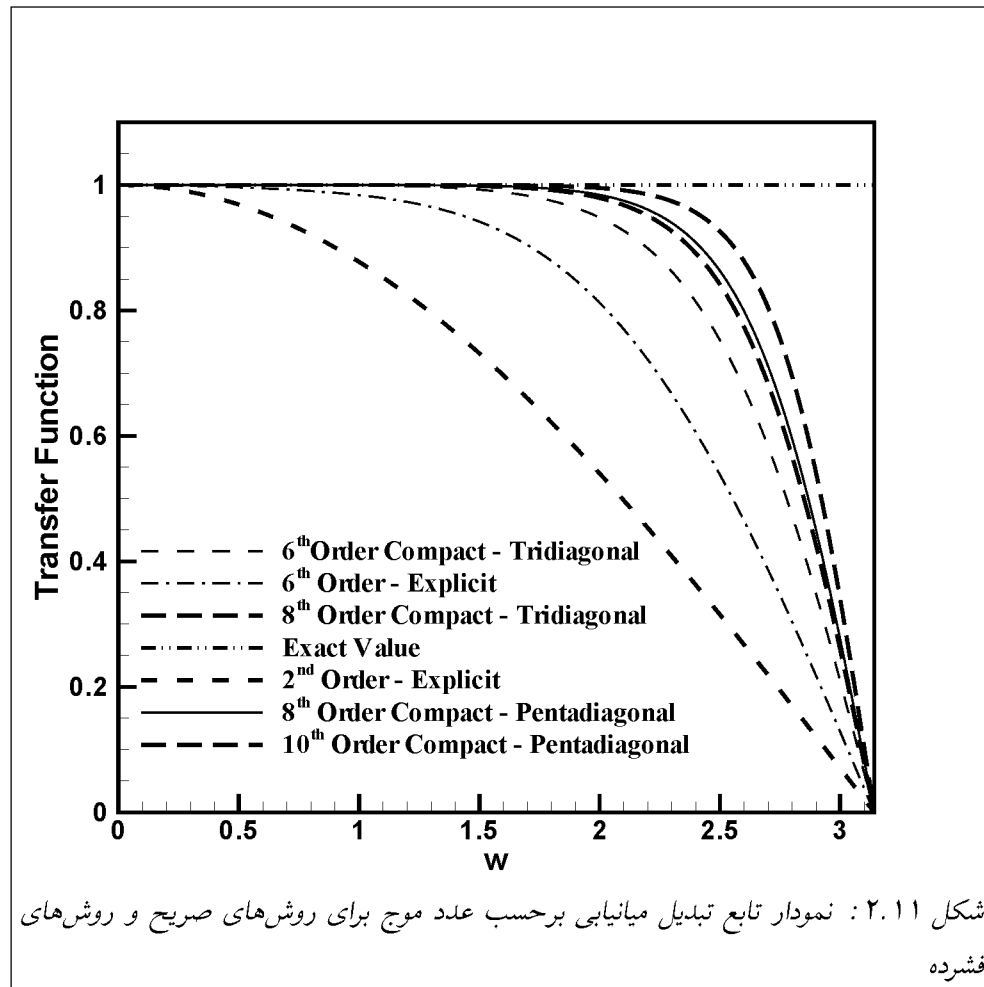
$$\alpha = \frac{10}{21} \quad \beta = \frac{5}{126} \quad a = \frac{5}{3} \quad b = \frac{5}{14} \quad c = \frac{1}{126} \quad (2.37)$$

تابع تبدیل روش‌های میانمایی متعددی بر حسب عدد موج w در شکل ۲.۱۱ نشان داده شده‌اند. با توجه به این شکل، برتری روش‌های فشرده بر روش‌های صریح مشابه به روشنی معلوم می‌باشد. همچنین در شکل روش میانمایی شبیه طیفی نیز نمایش داده شده‌است. این روش مرتبه چهار، با اعمال قید زیر به دست می‌آید.

$$T(w_*) = 1, \quad \frac{dT(w = w_*)}{dw} = 0. \quad (2.38)$$

روشی که در شکل نشان داده شده‌است، با قرار دادن $w_* = 2/5$ به دست آمده‌است. پارامترهای این روش به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.5579841, & \beta &= 0.07425165, & a &= 1.733442, & (2.39) \\ b &= 0.5105776, & c &= 0.2045137 \end{aligned}$$



۲.۹.۲ فیلتر عددی فشرده

رابطه کلی زیر برای فیلترهای عددی فشرده وجود دارد:

$$\begin{aligned}
 & \beta \hat{f}_{i-2} + \alpha \hat{f}_{i-1} + \hat{f}_i + \alpha \hat{f}_{i+1} + \beta \hat{f}_{i+2} \\
 &= a f_i + \frac{d}{4}(f_{i+3} + f_{i-3}) + \frac{c}{4}(f_{i+2} + f_{i-2}) \\
 &+ \frac{b}{4}(f_{i+1} + f_{i-1})
 \end{aligned} \tag{۲.۴۰}$$

در معادله بالا، $\hat{f}_i$ مقدار فیلتر شده تابع در گره x_i می‌باشد. از فیلترهای عددی برای حذف طول موج‌های کوتاه استفاده می‌گردد. مسأله را می‌توان با نوشتن تابع تبدیل برای معادله (۲.۴۰) به صورت

جدول ۲.۶: خطای قطع برای روش‌های فیلتر کردن

روش	بزرگترین اندازه	بزرگترین اندازه	خطای قطع
	استنسیل چپ	استنسیل راست	در معادله (۲.۴۰)
(۲.۴۳)	۵	۷	$\frac{1}{16}(1 - 2\alpha + 2\beta - 32d)h^4 f^{(4)}$
(۲.۴۴)	۵	۷	$\frac{1}{64}(1 - 2\alpha + 2\beta)h^6 f^{(6)}$
(۲.۴۵)	۵	۷	$\frac{1}{16}(3 - 2\alpha - 10\beta)h^4 f^{(4)}$
(۲.۴۶)	۵	۷	$\frac{1}{80}(2 - 3\alpha)h^6 f^{(6)}$
(۲.۴۷)	۵	۷	$\frac{1}{40}h^6 f^{(6)}$

زیر فرموله نمود:

$$T(w) = \frac{a + b \cos(w) + c \cos(2w) + d \cos(3w)}{1 + 2\alpha \cos(w) + 2\beta \cos(2w)} \quad (2.41)$$

برای فیلتر مورد نظر قید $T(\pi) = 0$ را در نظر می‌گیریم. برای تمام روش‌هایی که در این فصل توضیح داده می‌شود، اعمال این شرط به شکل اتوماتیک شرط $(dT/dw)(\pi) = 0$ را نیز برآورده می‌نماید. برای برخی از روش‌های فیلتر کردن که در این جا مورد بررسی قرار می‌دهیم شرط‌های اضافی زیر را نیز اعمال می‌نماییم:

$$\frac{d^2 T}{dw^2}(\pi) = 0, \quad \frac{d^4 T}{dw^4}(\pi) = 0 \quad (2.42)$$

روش‌های با دقت متفاوت را می‌توان با مطابقت دادن ضرایب مرتبه‌های مختلف بسط تیلور به دست آورد. معمولاً برای روش‌هایی که به کار می‌بریم، حداقل از دقت مرتبه چهار استفاده می‌نماییم. اگر قیدهای معادله (۲.۴۲) را اعمال ننماییم، یک خانواده از روش‌های مرتبه چهار با سه پارامتر به دست می‌آید. ضرایب این خانواده به صورت زیر می‌باشد:

$$a = \frac{1}{8}(5 + 6\alpha - 6\beta + 16d), \quad b = \frac{1}{4}(1 + 2\alpha + 2\beta - 2d) \\ c = \frac{-1}{8}(1 - 2\alpha - 14\beta + 16d) \quad (2.43)$$

خطای قطع برای این روش، به همراه خطای قطع روش‌های دیگر در جدول ۲.۶ آورده شده است. اگر ضرایب مرتبه شش در معادله (۲.۴۰) نیز به کار برده شود معادله (۲.۴۳) به صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$a = \frac{1}{16}(11 + 10\alpha - 10\beta), \quad b = \frac{1}{32}(15 + 34\alpha + 30\beta)$$

$$c = \frac{1}{16}(-3 + 6\alpha + 26\beta), \quad d = \frac{1}{32}(1 - 2\alpha + 2\beta) \quad (2.44)$$

اگر سعی نماییم تا ضرایب فوریۀ بیشتری را مطابقت دهیم، معادله (۲.۴۰) به تساوی یک برابر یک تبدیل می‌شود.

خانواده‌ متفاوتی از روش‌ها با اعمال اولین شرط از شرایط دوگانه (۲.۴۲) به علاوه شرط دقت مرتبۀ چهار به دست می‌آید. این خانواده دو پارامتری دارای ضرایب زیر می‌باشد:

$$a = \frac{2 + 3\alpha}{4}, \quad b = \frac{9 + 16\alpha + 10\beta}{16}$$

$$c = \frac{\alpha + 4\beta}{4}, \quad d = \frac{6\beta - 1}{16} \quad (2.45)$$

با اعمال قید مرتبۀ شش در معادله (۲.۴۵) داریم:

$$\beta = \frac{3 - 2\alpha}{10}, \quad a = \frac{2 + 3\alpha}{4}, \quad b = \frac{6 + 7\alpha}{8}$$

$$c = \frac{6 + \alpha}{20}, \quad d = \frac{2 - 3\alpha}{40} \quad (2.46)$$

اگر شرط دوم معادله (۲.۴۲) را نیز در معادله (۲.۴۶) اعمال نماییم، یک روش به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{3}{10}, \quad a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{3}{4}, \quad c = \frac{3}{10}, \quad d = \frac{1}{20} \quad (2.47)$$

راه دیگری برای بهینه‌سازی روش‌ها، به کار بردن شرایط خاصی در تابع تبدیل $T(w)$ می‌باشد. این کار به ما این امکان را می‌دهد که نقطه‌ای را که از آن به بعد موج‌ها را حذف می‌نماییم، تنظیم کنیم. این کار با برقراری روابط زیر انجام می‌شود:

$$T(w_1) = \nu_1, \quad T(w_2) = \nu_2 \quad (2.48)$$

در معادله بالا w_1, w_2, ν_1 و ν_2 مقادیر مشخصی می‌باشند. این قیدها به همراه معادله (۲.۴۵) همه ضرایب را مشخص می‌نمایند.

روش‌های سه‌قطری را می‌توان به عنوان حالات خاص معادلات (۲.۴۳)، (۲.۴۴) یا (۲.۴۵) به دست آورد. در شکل ۲.۱۲ تابع تبدیل برای روش سه‌قطری با $\beta = 0$ و $d = 0$ به همراه روش‌های فیلتر کردن صریح مرتبۀ دو، چهار و شش آورده شده است. آشکار است که روش‌های فشرده، فیلترهای پایین گذر^{۱۲} بهتری می‌باشند. با کاهش مقدار α به سمت ۰.۵، عمل فیلتر کردن

^{۱۲} Low Pass Filter

به سمت طول موج‌های کوتاه‌تر محدود می‌گردد. در شکل ۲.۱۳ تابع تبدیل روش پنج‌قطری نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که انتخاب نقطه آستانه در معادله (۲.۴۸) تعیین کننده عدد موج مربوط به نقطه قطع می‌باشد. دو روش نشان داده شده در این شکل با استفاده از ضرایب زیر به دست آمده‌اند:

$$\alpha = 0.4627507, \quad \beta = 0.2265509, \quad a = 0.8470630$$

$$b = 1.166845, \quad c = 0.3422386, \quad d = 0.02245659 \quad (2.49)$$

$$\alpha = 0.6522474, \quad \beta = 0.1702929, \quad a = 0.9891856$$

$$b = 1.321180, \quad c = 0.3333548, \quad d = 0.001359850 \quad (2.50)$$

برای استفاده از فیلترهای عددی بر روی بازه‌های داری مرزهای غیرمتناوب، بایستی تا گره‌های مرزی را به صورت جداگانه مورد بررسی قرار دهیم. همچنین روش‌های مرزی را می‌توان طوری طراحی نمود تا دقیقاً موج $w = \pi$ را فیلتر نمایند. فرمول‌های صریح نزدیک مرز (با دقت مرتبه چهار و با فیلتر کردن دقیق $w = \pi$) عبارتند از:

$$\hat{f}_1 = \frac{15}{16}f_1 + \frac{1}{16}(4f_2 - 6f_3 + 4f_4 - f_5) \quad (2.51)$$

$$\hat{f}_2 = \frac{3}{4}f_2 + \frac{1}{16}(f_2 + 6f_3 - 4f_4 + f_5) \quad (2.52)$$

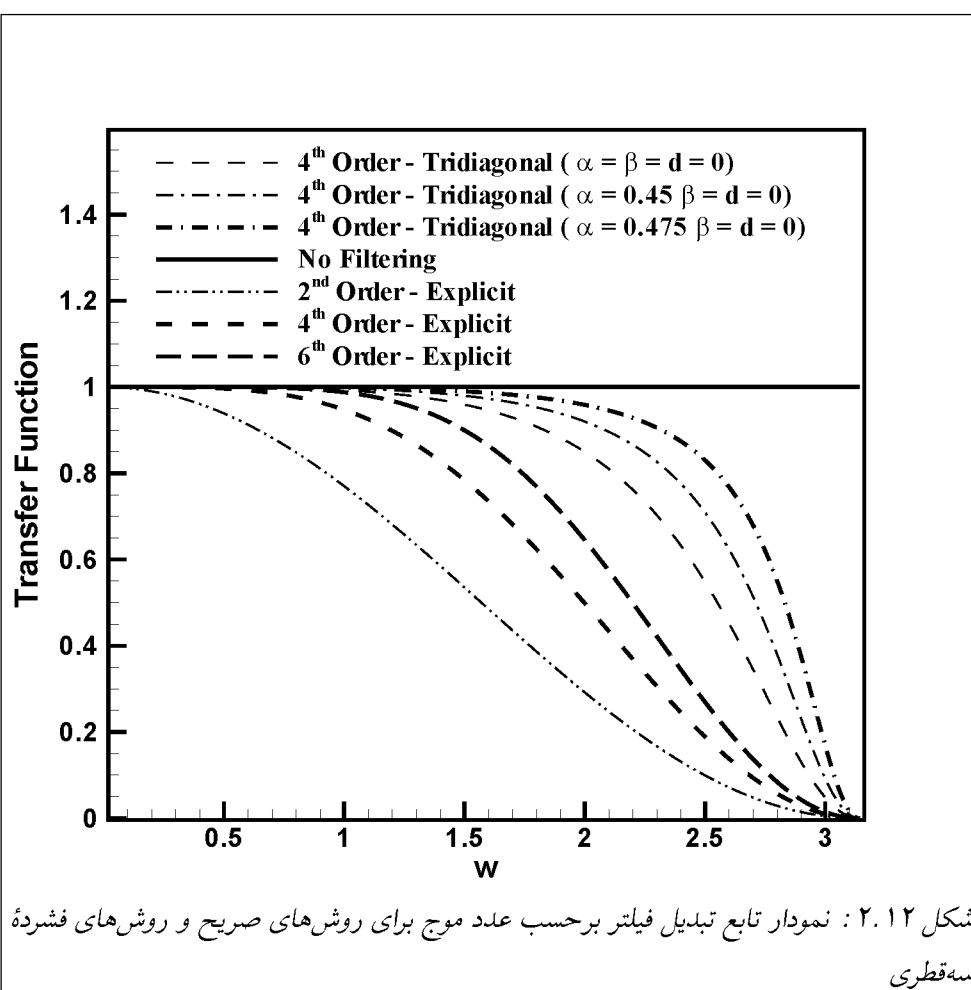
$$\hat{f}_3 = \frac{5}{8}f_3 + \frac{1}{16}(-f_1 + 4f_2 + 4f_4 - f_5) \quad (2.53)$$

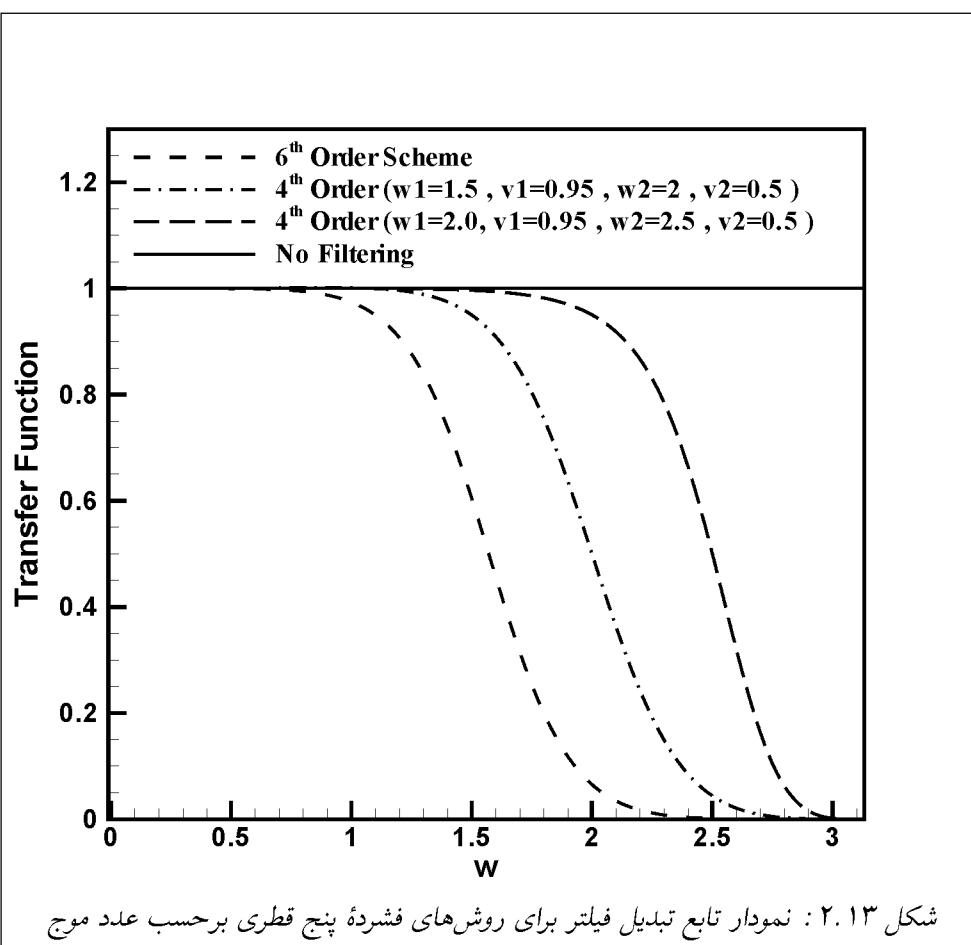
خطای قطع این روش‌ها به ترتیب به صورت زیر می‌باشد:

$$-\frac{3}{2}4!h^4f_1^{(4)}$$

$$\frac{11}{8}4!h^4f_2^{(4)}$$

$$-\frac{3}{2}4!h^4f_3^{(4)}$$





فصل ۳

حل جریان یک بعدی نمونه به روش فشرده

۳.۱ مقدمه

در این فصل به عنوان اولین گام در معرفی روش فشرده به حل معادلات اوایلر شبه یک بعدی در نازل شوبین خواهیم پرداخت. از آنجایی که این مسأله دارای جواب تحلیلی نیز می باشد، خواهیم توانست تا ارزیابی کیفی مناسبی از روش فشرده به عمل آوریم. همچنین در مورد مرتبه این روش و اثر نحوه فرمولاسیون شرایط مرزی بر روی مرتبه روش به بحث خواهیم پرداخت.

دو روش برای به کارگیری روش فشرده معرفی خواهد شد و دقت هر کدام از روش ها مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۳.۲ معادلات اوایلر شبه یک بعدی

معادلات حاکم بر جریان شبه یک بعدی که شامل معادلات پیوستگی، ممتوم و انرژی می باشند عبارتند از:

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u S)}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial(\rho u S)}{\partial t} + \frac{\partial[(\rho u^2 + p) S]}{\partial x} = p \frac{dS}{dx} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial(\rho e_t S)}{\partial t} + \frac{\partial[(\rho e_t + p) S u]}{\partial x} = 0 \quad (3.3)$$

در این معادلات $S = S(x)$ ، سطح مقطع نازل می‌باشد. این معادلات را به شکل پایستارشان می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = \vec{H} \quad (3.4)$$

که در آن

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \rho S \\ \rho u S \\ \rho e_t S \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} \rho u S \\ (\rho u^2 + p) S \\ (\rho e_t + p) u S \end{pmatrix}, \quad \vec{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ p \frac{dS}{dx} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

با استفاده از معادلات بالا و در دست داشتن هندسه نازل قادر خواهیم بود تا به حل معادلات اولر شبه یک‌بعدی در داخل نازل به‌پردازیم. همانطور که در مقدمه این فصل نیز خاطرنشان کردیم. نازلی که در این فصل به حل جریان شبه یک‌بعدی در آن خواهیم پرداخت نازل شوبین^۱ می‌باشد. نازل شوبین از مسائل آشنا در کتاب‌های دینامیک گاز بوده و لذا حل تحلیلی مربوط به آن موجود می‌باشد. به همین دلیل در این فصل و جهت بررسی روش فشرده از این هندسه استفاده خواهیم نمود. هندسه نازل شوبین با تابع

$$S(x) = 1/398 - 0/347 \tanh(4 - 0/8x) \quad (3.6)$$

مشخص می‌گردد. این نازل، یک نازل واگرا بوده و هندسه آن در شکل ۳.۱ نمایش داده شده است.

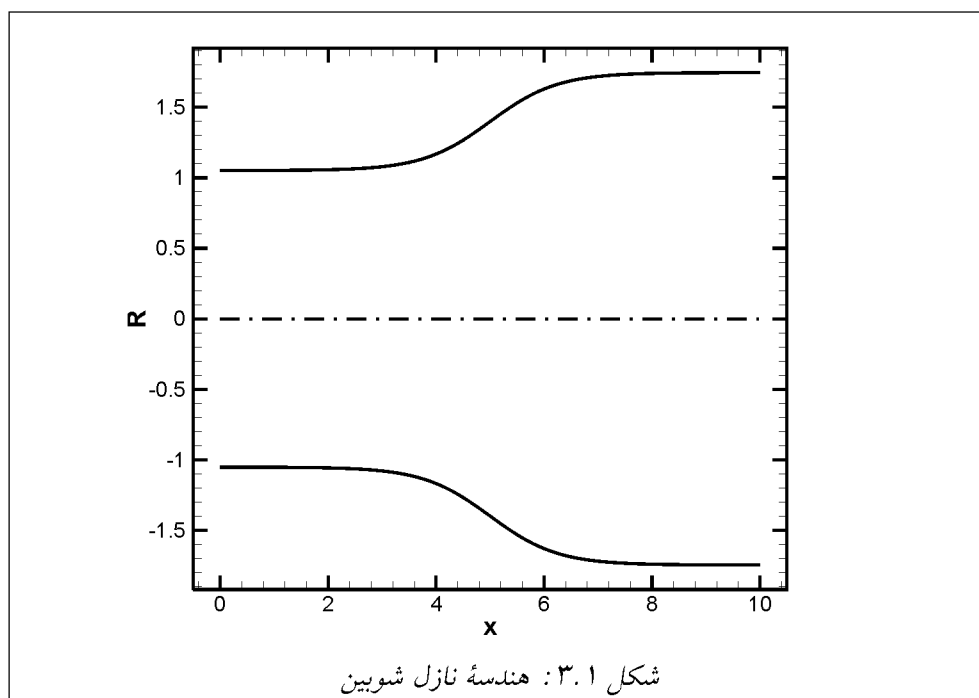
۳.۳ روش فشرده مرکزی مرتبه ۴

در این فصل و برای گسسته‌سازی مکانی از رابطه فشرده مرکزی مرتبه چهار استفاده می‌نماییم. این رابطه عبارت است از:

$$\frac{f_{i+1}}{6} + \frac{2f_i}{3} + \frac{f_{i-1}}{6} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^4) \quad (3.7)$$

در رابطه بالا علامت پریم نشان دهنده مشتق و h بیان‌کننده فاصله نقاط شبکه می‌باشد. رابطه (۳.۷) را می‌توان به صورت مناسبتری نیز نمایش داد که در واقع این نحوه نمایش، کار را برای گسسته‌سازی مکانی با استفاده از روش فشرده که یک روش ضمنی است، آسان‌تر می‌نماید.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = Q_x^{-1} D_{ox} f_i \quad (3.8)$$



اُپراتورهای به کار رفته در معادله (۳.۸) به صورت زیر تعریف می شوند:

$$Q_x f_i = \frac{f_{i+1} + 4f_i + f_{i-1}}{6}$$

$$D_{ox} f_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$$

برای حل معادلات شبه یک بعدی جریان سیال داخل نازل، ابتدا رابطه (۳.۸) را به کار خواهیم برد. گسسته سازی معادلات را با استفاده از رابطه روش بیم-وارمینگ [۲] به شکل دلتا شروع می کنیم. این رابطه عبارت است از:

$$\frac{\partial U^{n+1/2}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U^n}{\partial t} + \frac{\partial U^{n+1}}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial U^{n+1/2}}{\partial t} = \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}$$

$$\Delta U^n = U^{n+1} - U^n$$

با استفاده از روابط بالا به رابطه اصلی بیم-وارمینگ می رسم:

$$\Delta U^n = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \Delta U^n}{\partial t} + \Delta t \frac{\partial U^n}{\partial t} \quad (3.9)$$

برای یادآوری، رابطه برداری شکل پایستار معادلات بار دیگر در زیر آورده شده است:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = \vec{H} \quad (3.10)$$

با استفاده از رابطه (۳.۹) می‌توان معادله (۳.۱۰) را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned} \Delta U^n &= -\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \Delta F^n}{\partial x} - \Delta H^n \right) - \Delta t \left(\frac{\partial F^n}{\partial x} - H^n \right) \\ \Delta U^n &= S \Delta Q^n \end{aligned} \quad (3.11)$$

حال با استفاده از رابطه (۳.۸) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} S \Delta Q^n &= -\frac{\Delta t}{2} \left[Q_x^{-1} \Delta_{ox}(\Delta F^n) - \Delta H^n \right] \\ &\quad - \Delta t \left[Q_x^{-1} \Delta_{ox} F^n - H^n \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

با ضرب طرفین تساوی در Q_x رابطه (۳.۱۲) به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} Q_x(S \Delta Q^n) &= -\frac{\Delta t}{2} [D_{ox}(\Delta F^n) - Q_x(\Delta H^n)] \\ &\quad - \Delta t (D_{ox}(F^n) - Q_x H^n) \end{aligned} \quad (3.13)$$

در رابطه بالا F و H توابع غیرخطی از Q هستند. با استفاده از روش خطی‌سازی پیشنهادشده توسط بیم-وارمینگ می‌توان این توابع را از حالت غیرخطی به صورت زیر خارج ساخت. در ضمن یادآور می‌شویم که S تابعی از t نمی‌باشد.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(Q, S)}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial t} \approx \frac{\partial F}{\partial Q} \frac{Q^{n+1} - Q^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \\ &= \frac{\partial F}{\partial Q} \frac{\Delta Q}{\Delta t} + O(\Delta t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

که در نهایت با تکرار همین روش برای H به روابط زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} F^{n+1} &= F^n + A^n(Q^{n+1} - Q^n) + O(\Delta t)^2 \\ H^{n+1} &= H^n + B^n(Q^{n+1} - Q^n) + O(\Delta t)^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

در روابط فوق A و B ماتریس‌های ژاکوبین می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند^۲:

$$A = \frac{\partial F}{\partial Q} = S \begin{bmatrix} \circ & 1 & \circ \\ \frac{\gamma-3}{2} u^2 & -(\gamma-3)u & \gamma-1 \\ -\frac{ua^2}{\gamma-1} + \left(\frac{\gamma}{2} - 1\right) u^3 & \frac{a^2}{\gamma-1} + \left(\frac{3}{2} - \gamma\right) u^2 & \gamma u \end{bmatrix}$$

^۲ این روابط از مرجع [۶] گرفته شده‌اند.

$$B = \frac{\partial H}{\partial Q} = (\gamma - 1) \frac{dS}{dx} \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \frac{1}{2}u^2 & -u & 1 \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

با توجه به آنچه گذشت، معادله (۳.۱۳) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned} Q_x(S_i \Delta Q_i^n) = & - \frac{\Delta t}{\gamma} [D_{ox}(A^n \Delta Q^n) - Q_x(B^n \Delta Q^n)] \\ & - \Delta t (D_{ox}(F^n) - Q_x H^n) \end{aligned} \quad (3.16)$$

اکنون با استفاده از تعریف عملگرهای Q_x و D_{ox} رابطه (۳.۱۶) را به صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} (S_{i+1} \Delta Q_{i+1}^n + 4S_i \Delta Q_i^n + S_{i-1} \Delta Q_{i-1}^n) = \\ & - \frac{\Delta t}{\gamma} \left\{ \frac{1}{2h} (A_{i+1}^n \Delta Q_{i+1}^n - A_{i-1}^n \Delta Q_{i-1}^n) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{6} (B_{i+1}^n \Delta Q_{i+1}^n + 4B_i^n \Delta Q_i^n + B_{i-1}^n \Delta Q_{i-1}^n) \right\} \\ & - \Delta t \left[\frac{1}{2h} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) - \frac{1}{6} (H_{i+1}^n + 4H_i^n + H_{i-1}^n) \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

در نهایت پس از ساده‌سازی و انتقال مجهولات به سمت چپ تساوی داریم:

$$\begin{aligned} & \Delta Q_{i-1}^n \left[\frac{1}{6} S_{i-1} I - \frac{\Delta t}{4\Delta x} A_{i-1}^n - \frac{\Delta t}{12} B_{i-1}^n \right] \\ & + \Delta Q_i^n \left[\frac{2}{3} S_i I - \frac{\Delta t}{3} B_i^n \right] \\ & + \Delta Q_{i+1}^n \left[\frac{1}{6} S_{i+1} I + \frac{\Delta t}{4\Delta x} A_{i+1}^n - \frac{\Delta t}{12} B_{i+1}^n \right] \\ & = - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{6} (H_{i+1}^n + 4H_i^n + H_{i-1}^n) \end{aligned} \quad (3.18)$$

این معادلات را می‌توان به صورت خلاصه‌تر زیر نوشت:

$$a_{i-1}^n \Delta Q_{i-1}^n + b_{i-1}^n \Delta Q_i^n + c_{i+1}^n \Delta Q_{i+1}^n = r_i^n \quad (3.19)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} a_{i-1}^n &= \frac{1}{6} S_{i-1} I - \frac{\Delta t}{4\Delta x} A_{i-1}^n - \frac{\Delta t}{12} B_{i-1}^n \\ b_i^n &= \frac{2}{3} S_i I - \frac{\Delta t}{3} B_i^n \\ c_{i+1}^n &= \frac{1}{6} S_{i+1} I + \frac{\Delta t}{4\Delta x} A_{i+1}^n - \frac{\Delta t}{12} B_{i+1}^n \\ r_i^n &= - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{6} (H_{i+1}^n + 4H_i^n + H_{i-1}^n) \end{aligned}$$

۳.۴ گسسته‌سازی بدون استفاده از عملگرها

عمل گسسته‌سازی رابطه (۳.۱۱) را بدون استفاده از عملگرهای Q_x و D_{ox} نیز می‌توان انجام داد. در این جا یک‌بار دیگر این رابطه را تکرار می‌نماییم:

$$\begin{aligned}\Delta U^n &= -\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \Delta F^n}{\partial x} - \Delta H^n \right) - \Delta t \left(\frac{\partial F^n}{\partial x} - H^n \right) \\ \Delta U^n &= S \Delta Q^n\end{aligned}$$

با استفاده از رابطه بالا خواهیم داشت:

$$\frac{\partial F_i^{n+1}}{\partial x} = -\frac{2}{\Delta t} \Delta U_i^n + \left[-\frac{\partial F_i^n}{\partial x} + (H_i^{n+1} + H_i^n) \right] \quad (3.20)$$

حال با توجه به رابطه (۳.۷) برای جمله $\frac{\partial F_i^{n+1}}{\partial x}$:

$$\begin{aligned}& \frac{1}{6} \left[-\frac{2}{\Delta t} \Delta U_{i+1}^n + [-\dot{F}_{i+1}^n + (H_{i+1}^{n+1} + H_{i+1}^n)] \right] \\ & + \frac{2}{3} \left[-\frac{2}{\Delta t} \Delta U_i^n + [-\dot{F}_i^n + (H_i^{n+1} + H_i^n)] \right] \\ & + \frac{1}{6} \left[-\frac{2}{\Delta t} \Delta U_{i-1}^n + [-\dot{F}_{i-1}^n + (H_{i-1}^{n+1} + H_{i-1}^n)] \right] \\ & = \frac{1}{2h} (F_{i+1}^{n+1} - F_{i-1}^{n+1})\end{aligned} \quad (3.21)$$

به کمک رابطه (۳.۱۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}& \frac{1}{6} \left[-\frac{2}{\Delta t} S_{i+1} \Delta Q_{i+1}^n + [-\dot{F}_{i+1}^n + (2H_{i+1}^n + B_{i+1}^n \Delta Q_{i+1}^n)] \right] \\ & + \frac{2}{3} \left[-\frac{2}{\Delta t} S_i \Delta Q_i^n + [-\dot{F}_i^n + (2H_i^n + B_i^n \Delta Q_i^n)] \right] \\ & + \frac{1}{6} \left[-\frac{2}{\Delta t} S_{i-1} \Delta Q_{i-1}^n + [-\dot{F}_{i-1}^n + (2H_{i-1}^n + B_{i-1}^n \Delta Q_{i-1}^n)] \right] \\ & = \frac{1}{2h} (F_{i+1}^{n+1} - F_{i-1}^{n+1})\end{aligned} \quad (3.22)$$

پس از ساده‌سازی و انتقال معلومات به سمت راست:

$$\begin{aligned}& \frac{1}{6} \Delta Q_{i+1}^n \left[-\frac{2}{\Delta t} S_{i+1} I + B_{i+1}^n \right] + \frac{2}{3} \Delta Q_i^n \left[-\frac{2}{\Delta t} S_i I + B_i^n \right] \\ & + \frac{1}{6} \Delta Q_{i-1}^n \left[-\frac{2}{\Delta t} S_{i-1} I + B_{i-1}^n \right] = \frac{1}{2h} (F_{i+1}^{n+1} - F_{i-1}^{n+1}) \\ & + \frac{1}{6} [\dot{F}_{i+1}^n + 4\dot{F}_i^n + \dot{F}_{i-1}^n] - \frac{1}{3} [H_{i+1}^n + 4H_i^n + H_{i-1}^n]\end{aligned} \quad (3.23)$$

اکنون رابطه (۳.۱۵) را برای ماتریس F به کار می‌بریم. در نهایت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 & \Delta Q_{i-1}^n \left[\frac{1}{6} S_{i-1} I - \frac{\Delta t}{4 \Delta x} A_{i-1}^n - \frac{\Delta t}{12} B_{i-1}^n \right] \\
 & + \Delta Q_i^n \left[\frac{2}{3} S_i I - \frac{\Delta t}{3} B_i^n \right] \\
 & + \Delta Q_{i+1}^n \left[\frac{1}{6} S_{i+1} I + \frac{\Delta t}{4 \Delta x} A_{i+1}^n - \frac{\Delta t}{12} B_{i+1}^n \right] \\
 & = -\frac{\Delta t}{4 \Delta x} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{12} [\dot{F}_{i+1}^n + 4 \dot{F}_i^n + \dot{F}_{i-1}^n] \\
 & + \frac{\Delta t}{6} [H_{i+1}^n + 4 H_i^n + H_{i-1}^n] \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

شباهت موجود میان روابط (۳.۲۴) و (۳.۱۸) قابل تأمل است. سمت چپ این روابط کاملاً مشابه یکدیگر است. تنها تفاوت قابل ملاحظه میان این روابط ضریب عبارت $(F_{i+1}^n - F_{i-1}^n)$ و جمله‌های شامل مشتق تابع F در رابطه (۳.۲۴) می‌باشد، که با استفاده از رابطه (۳.۷) به صورت معادله (۳.۱۸) در می‌آید.

برای حل مسئله باید مقادیر M و CFL مشخص باشند. با توجه به مقادیر ویژه این مسئله، عدد CFL به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$CFL = \lambda_{max} \frac{\Delta t}{\Delta x} = (u + a)_{max} \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

در هر تکرار مقدار بیشینه $u + a$ (سرعت صوت است) روی شبکه محاسبه می‌شود و سپس از رابطه فوق Δt محاسبه می‌شود.

برای آنکه حل عددی معادلات فوق پایدار گردد، ترم اتلافی مرتبه چهارم صریح به آن اضافه می‌شود که برابر است با:

$$\begin{aligned}
 D_e &= -\epsilon_e (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \\
 &= -\epsilon_e (Q_{i-2} - 4Q_{i-1} + 6Q_i - 4Q_{i+1} + Q_{i+2}) \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

آنالیز پایداری نشان می‌دهد که مقدار عددی ϵ_e باید مقدار کوچکی باشد که این موضوع باعث پایین آمدن سرعت همگرایی می‌گردد. برای افزایش این مقدار و بالا رفتن سرعت همگرایی، لازم است تا جمله اتلافی ضمنی به سمت چپ معادله اضافه گردد. این جمله برابر است با:

$$D_i = -\epsilon_i (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 \Delta Q}{\partial x^2} = -\epsilon_i (\Delta Q_{i-1} - 2\Delta Q_i + \Delta Q_{i+1}) \quad (3.26)$$

مقادیر ضرایب جمله‌های اتلافی بسته به مقدار M و CFL متفاوت می‌باشند ولی در کلیه حالات از رابطه زیر تبعیت می‌نمایند. در ضمن برای وابسته نبودن جواب حالت پایدار این جملات در Δt ضرب می‌گردند:

$$\epsilon_e = 2\epsilon_i$$

روش بیان شده فوق به نام حل دلتا فرم معروف می‌باشد. زیرا در این حل در هر تکرار مقدار ΔQ^n محاسبه می‌شود و به مقدار Q^n اضافه می‌شود تا مقدار Q^{n+1} به دست آید. حل تا جایی ادامه می‌یابد که به حالت دائم برسد که در این صورت باید مقدار ΔQ به سمت صفر میل کند. مزیت این روش این است که با این دسته‌بندی می‌توان معادلات فوق را به صورت یک دستگاه سه قطری بلوکی حل کرد.

برای حل معادلات به شرایط مرزی نیاز داریم که در بخش بعد به تشریح آن خواهیم پرداخت.

۳.۵ روش حل و شرایط مرزی

برای حل معادلات اویلر که در بالا بیان شد، نیاز به شرایط مرزی در ورود و خروج از نازل داریم. این شرایط مرزی با توجه به فیزیک مسأله به دست می‌آیند. در ورود به نازل، جریان مافوق صوت می‌باشد و بنابراین هر سه خطوط مشخصه از خارج نازل به سمت داخل آن می‌باشند، لذا در مرز ورودی نیاز به سه شرط ورودی داریم که این سه شرط برابر است با سرعت، فشار و چگالی^۳. در مرز خروجی دو حالت را در نظر می‌گیریم:

۱. خروجی مافوق صوت که در این صورت هر سه خطوط مشخصه از داخل نازل به سمت خارج می‌باشد که با این توصیف نیاز به دادن شرط مرزی به عنوان ورودی نداریم و باید مقادیر روی مرز از مقادیر داخلی برون‌یابی شوند یا از طریق مشخصه‌ها به دست آیند.

۲. خروجی مادون صوت که در این صورت از سه خط مشخصه دوتای آن‌ها از داخل نازل به سمت بیرون و یکی از آن‌ها از خارج نازل به سمت داخل هستند. این موضوع بیان می‌کند که برای داشتن شرط مرزی مادون صوت لازم است تا یکی از متغیرها به عنوان ورودی به برنامه داده شود. این متغیر فشار می‌باشد.

^۳ برای مطالعه بیشتر می‌توانید به مرجع [۱۴] مراجعه کنید.

۳.۵.۱ شرط مرزی خروجی مافوق صوت مرتبه دو

از آنجا که ورودی مافوق صوت است تمام متغیرها به صورت ورودی به برنامه داده شده اند. بنابراین رابطه $\Delta Q^n = 0$ برقرار است. شایان ذکر است که فواصل مکانی نقاط شبکه به صورت زیر می باشد:

$$x_i = hi \quad 0 \leq i \leq M$$

معادلات (۳.۱۸) به صورت زیر خواهند بود.

$$\begin{aligned} b_1^n \Delta Q_1^n + c_1^n \Delta Q_1^n &= r_1^n \\ a_{i-1}^n \Delta Q_{i-1}^n + b_{i-1}^n \Delta Q_i^n + c_{i+1}^n \Delta Q_{i+1}^n &= r_i^n \quad 2 \leq i \leq M-2 \end{aligned}$$

در خروجی که شرایط مرزی مافوق صوت داریم، طبق آنچه که قبلاً بیان شده تمامی متغیرها از داخل میدان برون یابی شده اند. برای برون یابی این متغیرها از فرمول (۳.۲۷) استفاده شده است.

$$\Psi_M = 2 \times \Psi_{M-1} - \Psi_{M-2} \quad (3.27)$$

که در آن متغیر Ψ نماینده هریک از متغیرهای میدان می باشد. آنالیز پایداری خطی نشان می دهد که روش ضمنی معادله (۳.۲۷) نامشروط پایدار است. بنابراین با استفاده از معادله اخیر به روش زیر عمل کرده ایم.

$$\begin{aligned} \Delta Q_M^n &= Q_M^{n+1} - Q_M^n = 2Q_{M-1}^{n+1} - Q_{M-2}^{n+1} - Q_M^n \\ &= 2\Delta Q_{M-1}^n - \Delta Q_{M-2}^n - Q_M^n + 2Q_{M-1}^n - Q_{M-2}^n \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه بالا و مرتب کردن مجهولات، معادله (۳.۱۸) را برای $i = M-1$ بازنویسی می کنیم:

$$\begin{aligned} (a_{M-2}^n - c_M^n) \Delta Q_{M-2}^n + (b_{M-1}^n + 2c_M^n) \Delta Q_{M-1}^n \\ = c_M^n (Q_M^n - 2Q_{M-1}^n + Q_{M-2}^n) + r_{M-1}^n \end{aligned}$$

۳.۵.۲ شرط مرزی خروجی مافوق صوت مرتبه سوم

برای این فرمولاسیون از فرمول یک سویه فشرده مرتبه سوم زیر استفاده می نماییم:

$$f_i' + 2f_{i-1}' = \frac{5f_i - 4f_{i-1} - f_{i-2}}{2h}$$

حال با استفاده از این فرمولاسیون معادلات حاکم را در آخرین گره خروجی گسسته می‌نماییم. نتایج به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\left(\frac{5A_i S_i}{2\Delta x} + \frac{2}{\Delta t} S_i\right) \Delta U_i - \left(\frac{5A_{i-1} S_{i-1}}{2\Delta x} + \frac{2}{\Delta t} S_{i-1}\right) \Delta U_{i-1} - \left(\frac{A_{i-2} S_{i-2}}{2\Delta x}\right) \Delta U_{i-2} = -2 \left(\frac{\partial F}{\partial x} - H\right)_i - 2 \left(\frac{\partial F}{\partial x} - H\right)_{i-1} \quad (3.28)$$

۳.۵.۳ شرط مرزی خروجی مادون‌صوت

در این حالت یکی از مقادیر سیال باید معلوم باشد. این مقدار معلوم را فشار انتخاب کرده‌ایم. بنابراین برونمایی را تنها باید برای دو سطر ΔQ_M اعمال کنیم. پس اگر برونمایی برای سطر اول و دوم انجام شود، مقادیر ρ_M و $(\rho u)_M$ به‌دست می‌آیند و با دانستن مقدار P_M می‌توان سطر سوم، یعنی $(\rho e_t)_M$ ، را محاسبه کرد.

۳.۶ نتایج

برای حل دستگاه‌های سه قطری حاصل از رابطه (۳.۱۸) برنامه‌هایی به زبان فرترن نوشته شده و مورد استفاده قرار گرفته‌است. برای مقایسه، نتایج به‌دست آمده از حل عددی و حل با استفاده از روابط آیزنتروپیک در دو نقطه از نازل، یعنی در $x = 5$ و $x = 8$ ، در حالت بدون شوک آورده شده‌است.^۴ این مقادیر را در جدول ۳.۱ مشاهده می‌کنید.

دقت روش فشرده نیز مورد بررسی قرار گرفته‌است. نتایج حاصل از این بررسی برای دو شرط مرزی مرتبه دو و چهار در شکل ۳.۲ آورده شده‌است. نرم محاسبه شده، نرم L_2 می‌باشد، که از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$Error(L_2) = \sqrt{\int (p - p_e)^2 dx}$$

همانطور که مشاهده می‌شود، نرم برای متغیر فشار محاسبه شده‌است. تمامی محاسبات تا خطای 10^{-14} انجام گرفته‌است.

^۴ برای محاسبات از روابط آیزنتروپیک گاز کامل استفاده شده‌است.

جدول ۳.۱: مقادیر محاسبه شده و دقیق در $x = 5$ و $x = 8$ برای حالت بدون شوک

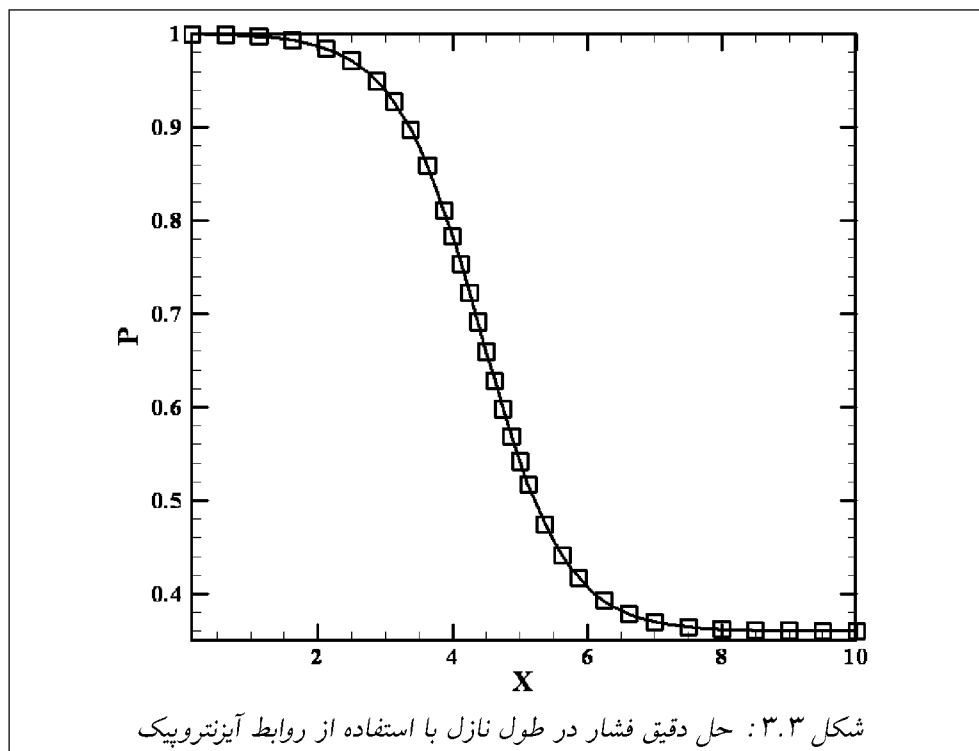
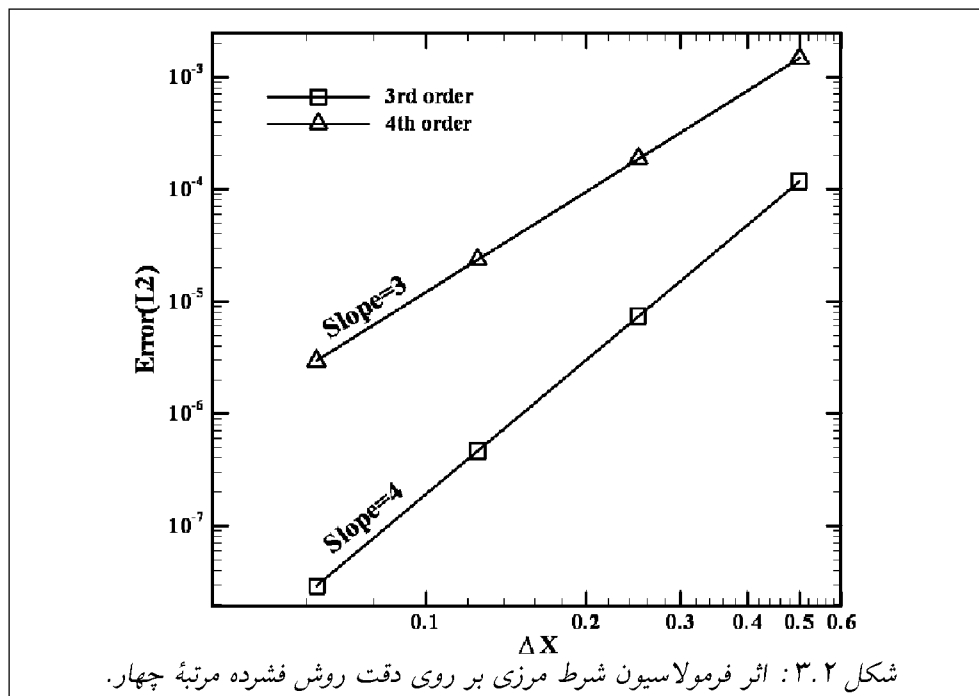
	$x = 5$		
	حل آیزنتروپیک	بدون استفاده از عملگر	با استفاده از عملگر
p	۰/۵۴۱۸۵۸۴۷۶۳۸۵۲۰۷	۰/۵۴۱۶۷۳۵۵۰۹۴۷۱۹۵	۰/۵۴۱۶۷۳۵۵۰۹۴۷۱۹۶
u	۲/۰۶۷۴۱۸۹۹۰۴۷۰۷۴۰	۲/۰۶۷۳۱۰۲۲۱۸۰۰۱۴۰	۲/۰۶۷۳۱۰۲۲۱۸۰۰۱۳۰
ρ	۰/۶۴۵۵۳۳۰۴۶۲۲۹۱۷۷	۰/۶۴۵۱۴۰۶۵۰۳۷۲۹۹۲	۰/۶۴۵۱۴۰۶۲۰۳۷۲۹۹۳
T	۰/۸۳۹۳۹۶۹۵۹۶۹۱۵۶۶	۰/۸۳۹۶۲۰۹۰۴۰۹۶۸۸۲	۰/۸۳۹۶۲۰۹۰۴۰۹۶۸۸۳
	$x = 8$		
	حل آیزنتروپیک	بدون استفاده از عملگر	با استفاده از عملگر
p	۰/۳۶۱۹۵۴۸۰۷۸۶۷۰۴۷	۰/۳۶۲۱۰۷۵۳۹۲۰۲۴۵۱	۰/۳۶۲۱۰۷۵۳۹۲۰۲۴۵۱
u	۲/۲۱۶۷۵۵۳۴۹۸۰۸۷۰۰	۲/۲۱۶۴۵۳۳۶۹۰۴۷۴۰۰	۲/۲۱۶۴۵۳۳۶۹۰۴۷۴۰۰
ρ	۰/۴۸۳۸۹۷۱۹۷۵۹۱۱۹۶	۰/۴۸۳۹۸۷۸۶۶۳۱۲۱۶۷	۰/۴۸۳۹۸۷۸۶۶۳۱۲۱۶۶
T	۰/۷۴۷۹۹۹۳۸۸۴۴۲۰۷۲	۰/۷۴۸۱۷۴۸۲۹۱۷۸۲۵۰	۰/۷۴۸۱۷۴۸۲۹۱۷۸۲۵۲

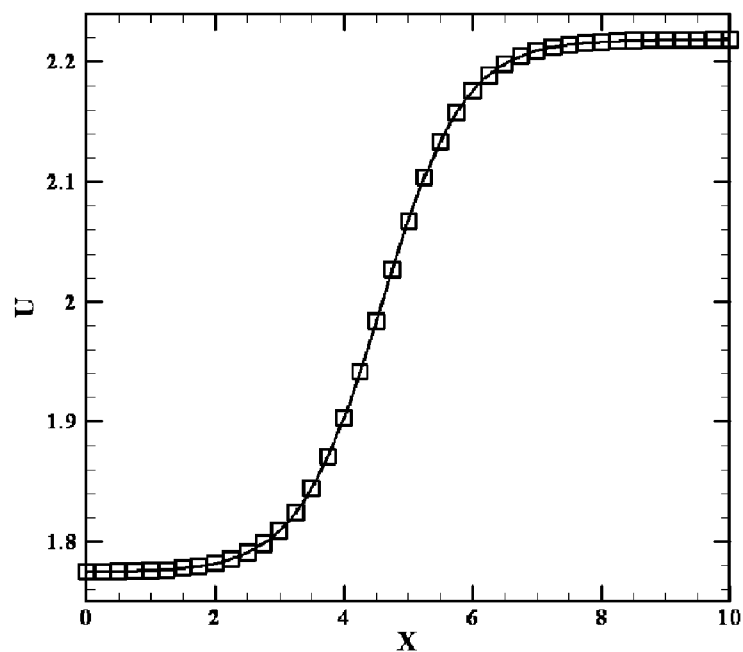
نتایج حاصل از این بررسی با پیش‌بینی‌های گوستافسون^۵ منطبق می‌باشد. بر این اساس اگر از شرط مرزی مرتبه سوم فشرده استفاده نماییم، مرتبه کلی روش چهار می‌باشد و اگر از شرط مرزی مرتبه دو استفاده نماییم، مرتبه روش تا سه کاهش می‌یابد. تغییرات فشار نسبی و سرعت برای دو حالت بدون شوک و همراه شوک شکل‌های ۳.۴ تا ۳.۷ نشان داده شده‌اند.

۳.۷ جملات استهلاکی غیرخطی

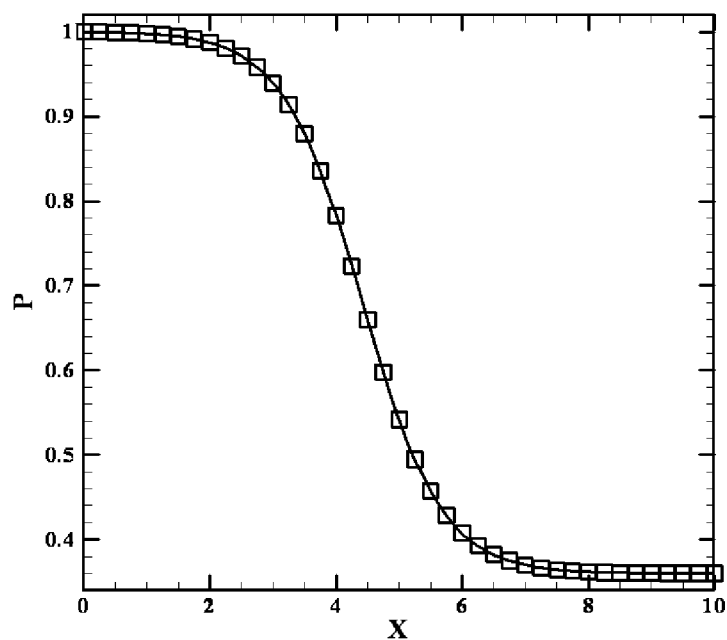
همانطور که در شکل‌های ۳.۶ و ۳.۷ مشخص می‌باشد، در نزدیکی محل شوک حل دارای نوساناتی می‌باشد. این نوسانات به‌خاطر وجود جمله استهلاکی مرتبه چهار می‌باشد که به‌صورت صریح به معادلات اضافه شده‌است. آزمایش عددی نشان می‌دهد که ریزتر کردن شبکه این نوسانات را افزایش می‌دهد. برای رفع این نوسانات بایستی از جملات استهلاکی غیرخطی استفاده نماییم (برای

^۵ Gustafsson

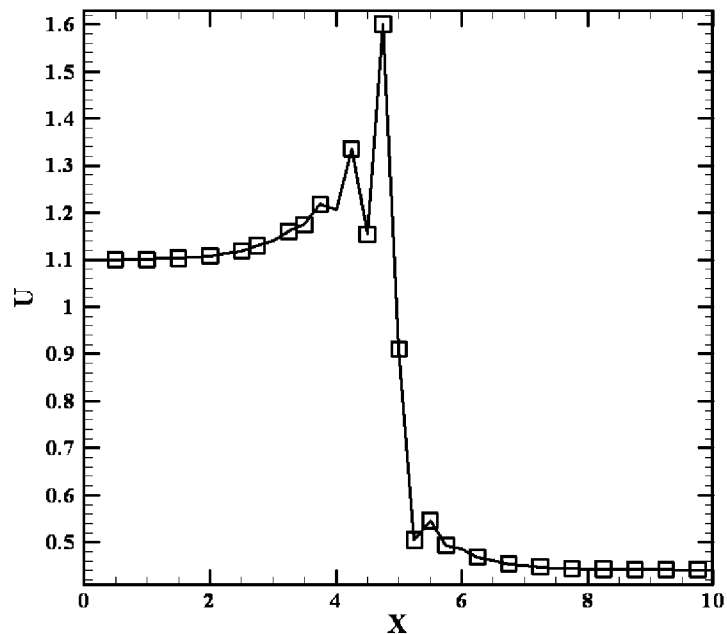




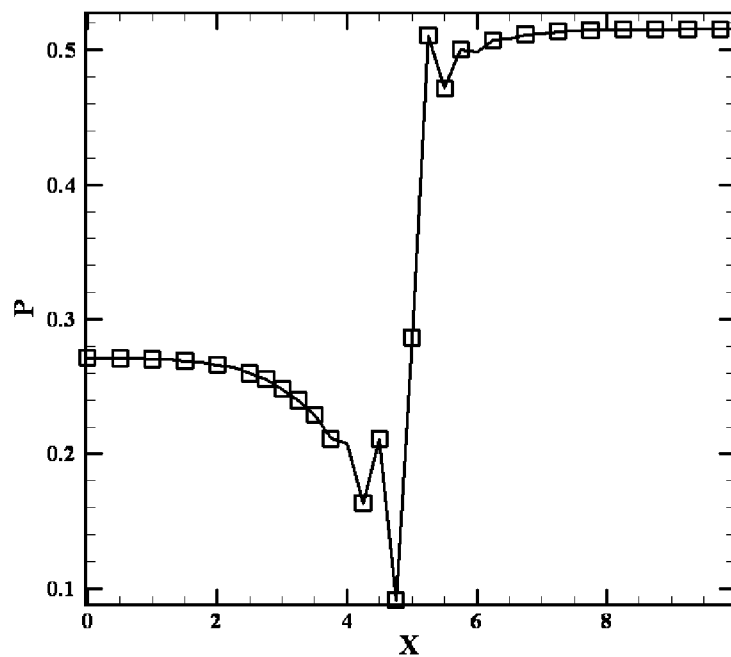
شکل ۳.۴: تغییرات سرعت در طول نازل برای حالت جریان آیزنتروپیک



شکل ۳.۵: تغییرات فشار در طول نازل نسبت به فشار در ابتدای نازل برای حالت آیزنتروپیک



شکل ۳.۶: تغییرات سرعت در طول نازل برای حالت همراه با شوک



شکل ۳.۷: تغییرات فشار در طول نازل نسبت به فشار در ابتدای نازل برای حالت همراه با شوک

توضیحات بیشتر به مرجع [۱۸] مراجعه کنید. این جملات به صورت زیر می باشند.

$$\nabla (u_{i+1} + a_{i+1} + u_i + a_i) (\epsilon_i^{(2)} \Delta - \epsilon_i^{(4)} \Delta \nabla \Delta) Q_i \quad (3.29)$$

که در آن:

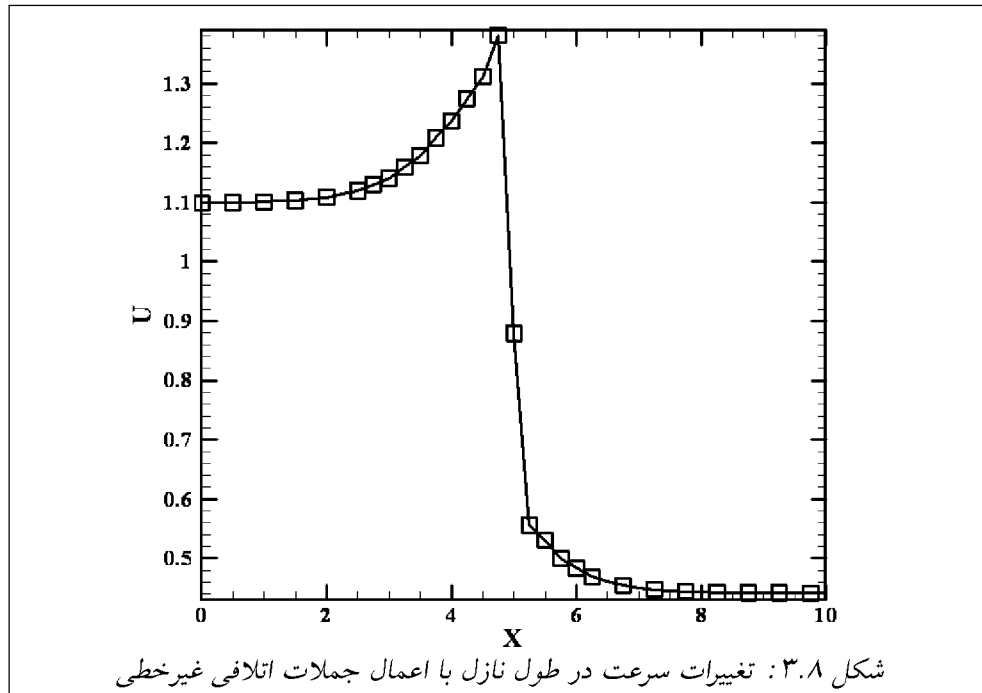
$$\epsilon_i^{(2)} = k_2 \Delta t \max (\gamma_{i+1} + \gamma_i + \gamma_{i-1})$$

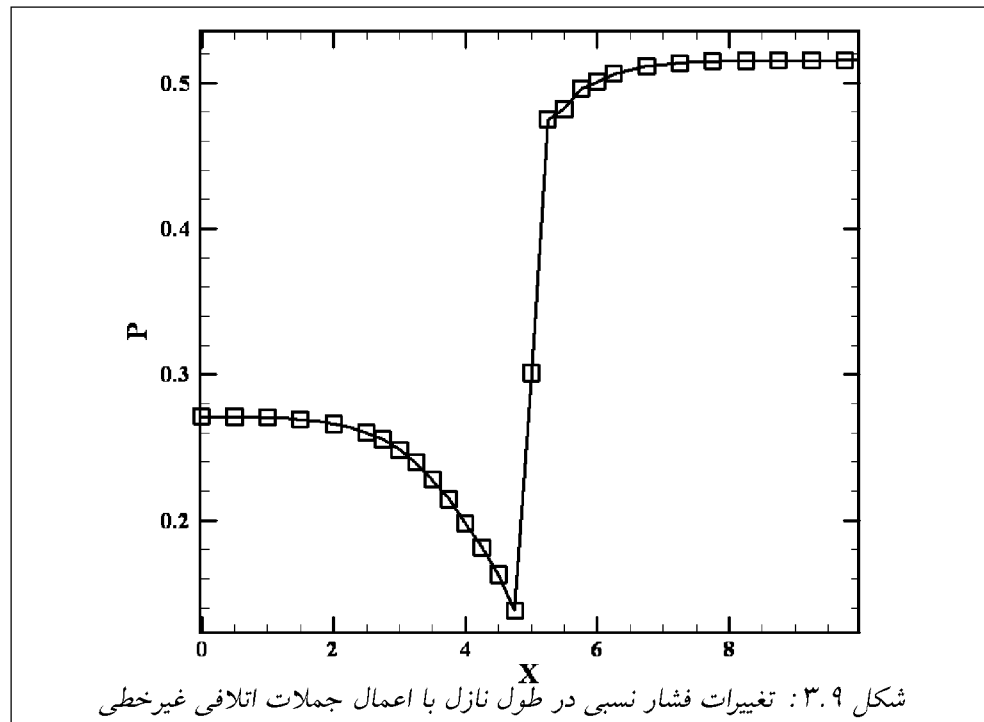
$$\gamma_i = \left| \frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{p_{i+1} + 2p_i + p_{i-1}} \right|$$

$$\epsilon_i^{(4)} = \max (0, k_4 \Delta t - \epsilon_i^{(2)})$$

همانطور که مشاهده می شود جمله استهلاکی مرتبه چهار در نزدیکی شوک به طور اتوماتیک غیرفعال می گردد و تنها جمله مرتبه دو فعال می باشد.

مقادیر k_2 و k_4 معمولاً به ترتیب برابر با ۰.۲۵ و ۰.۰۱ در نظر گرفته می شوند. نتایج حاصل از اعمال این جملات استهلاکی غیرخطی در شکل های ۳.۸ و ۳.۹ نمایش داده شده است. همانطور که مشاهده می شود، نوسانات بخوبی حذف شده اند.





فصل ۴

فرمولاسیون فشرده برای معادلات ناویر-استوکس

۴.۱ مقدمه

در فصل‌های گذشته به بررسی فرمولاسیون فشرده به صورت کلی پرداختیم. در این فصل‌ها مزایا و معایب این روش به همراه برخی کاربردهای آن را مورد بحث قرار دادیم و دقت این روش را در حالت یک بعدی بررسی نمودیم. در این فصل به حل یک مسأله کلاسیک مکانیک سیالات خواهیم پرداخت. مسأله مورد نظر حل جریان تراکم‌پذیر و لزج بر روی صفحه تخت می‌باشد. این مسأله به خوبی همه جوانب یک مسأله مکانیک سیالات را دارا می‌باشد.

۴.۲ معادلات ناویر استوکس

بحث را با استفاده از معادلات ناویر-استوکس دوبعدی و برای حالت بدون بعد آغاز می‌نماییم. برای بی‌بعدسازی معادلات می‌توانیم از ترکیب‌های متفاوتی استفاده نماییم. در این بخش از پارامترهای زیر برای بی‌بعد سازی استفاده نموده‌ایم:

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{\infty}}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{a_{\infty}}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{a_{\infty}}, \quad \tilde{E} = \frac{E}{\rho_{\infty} a_{\infty}^2}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{T_{\infty}} \quad (4.1)$$

در این معادلات اندیس ∞ بیان‌کننده خواص جریان آزاد می‌باشد. با انتخاب یک طول مرجع مناسب (در این جا طول صفحه تخت و در مورد ایرفویل، وتر ایرفویل) سایر پارامترهای دیگر نیز به صورت زیر بدون بعد می‌گردند:

$$\tilde{t} = \frac{t a_{\infty}}{l}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_{\infty}}, \quad \tilde{Re} = \frac{\rho_{\infty} l a_{\infty}}{\mu_{\infty}}, \quad \tilde{P} = \frac{P}{P_{\infty} \gamma} \quad (4.2)$$

همانطور که مشاهده می‌نماییم عدد رینولدز بر اساس a_∞ تعریف گردیده است. بنابراین بایستی عدد رینولدز را که براساس u_∞ می‌باشد بر عدد ماخ ($M_\infty = u_\infty/a_\infty$) تقسیم نماییم. از این به بعد در این فصل برای سادگی علامت $\sim$ را برای متغیرهای بدون بعد حذف می‌نماییم. براساس بی‌بعد سازی‌ای که در بالا ذکر نمودیم، معادلات ناویر استوکس در حالت پایستار و در شکل برداری، به صورت زیر در می‌آیند:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y} \right) \quad (۴.۳)$$

که در آن:

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{bmatrix}$$

$$E_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ f_\tau \end{bmatrix}, \quad F_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ g_\tau \end{bmatrix} \quad (۴.۴)$$

در این معادلات:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \mu(2u_x - 2v_y)/3 \\ \tau_{xy} &= \mu(u_y + v_x) \\ \tau_{yy} &= \mu(-2u_x + 2v_y)/3 \\ f_\tau &= u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + \mu Pr^{-1}(\gamma - 1)^{-1} \frac{\partial a^2}{\partial x} \\ g_\tau &= u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + \mu Pr^{-1}(\gamma - 1)^{-1} \frac{\partial a^2}{\partial y} \end{aligned} \quad (۴.۵)$$

همچنین فشار را با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌نماییم:

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \rho \frac{1}{\gamma} (u^2 + v^2) \right) \quad (۴.۶)$$

در این معادله γ نسبت گرماهای مخصوص می‌باشد که معمولاً ۱.۴ در نظر گرفته می‌شود. سرعت صوت a می‌باشد که برای گازهای ایده‌آل از رابطه $a^2 = \gamma p / \rho$ محاسبه می‌گردد. مقدار لزجت

دینامیکی نیز μ می باشد و از رابطه ساترلند^۱ به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\mu \approx T^{3/2} \frac{1 + S/T}{T + S/T}, \quad T = 273k, \quad S_{\text{هوا}} = 110/4k \quad (4.7)$$

۴.۳ تبدیل معادلات در دستگاه مختصات منحنی الخط عمومی

معادلات ناویر استوکس را از مختصات کارتزین به مختصات منحنی الخط عمومی زیر منتقل می نماییم:

$$\tau = t$$

$$\xi = \xi(x, y, t) \quad (4.8)$$

$$\eta = \eta(x, y, t)$$

پس از این انتقال، معادلات ناویر استوکس به صورت زیر در می آیند:

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial \hat{E}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}_v}{\partial \eta} \right] \quad (4.9)$$

در این معادلات:

$$\hat{Q} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad \hat{E} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho u U + \xi_y p \\ U(E + p) - \xi_t p \end{bmatrix}$$

$$\hat{F} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ V(E + P) - \eta_t p \end{bmatrix}$$

که در این معادلات U و V مولفه های سرعت پاوردا^۲ می باشند و به صورت زیر تعریف می گردد:

$$U = \xi_t + \xi_x u + \xi_y v, \quad V = \eta_t + \eta_x u + \eta_y v \quad (4.10)$$

جملات مربوط به شار لزج نیز به صورت زیر می باشند:

$$\hat{E}_v = \frac{1}{J} (\xi_x E_v + \xi_y F_v), \quad \hat{F}_v = \frac{1}{J} (\eta_x E_v + \eta_y F_v) \quad (4.11)$$

Sutherland^۱
Contravariant^۲

جملات مربوط به تنش‌ها نیز برحسب مشتقات ξ و η به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= \mu(4(\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta) - 2(\xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta))/3 \\ \tau_{xy} &= \mu(\xi_y u_\xi + \eta_y u_\eta + \xi_x v_\xi + \eta_x v_\eta) \\ \tau_{yy} &= \mu(-2(\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta) + 4(\xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta))/3 \\ f_\xi &= u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + \frac{\mu}{Pr(\gamma - 1)}(\xi_x \frac{\partial a^2}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial a^2}{\partial \eta}) \\ g_\xi &= u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + \frac{\mu}{Pr(\gamma - 1)}(\xi_y \frac{\partial a^2}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial a^2}{\partial \eta})\end{aligned}\quad (4.12)$$

۴.۴ تقریب لایه نازک برای معادلات ناویر استوکس

در اعداد رینولدز بالا تاثیر لزجت به نواحی نازکی در نزدیکی دیواره و نواحی گردابه‌ای محدود می‌گردد. در محاسبات به دلیل صرفه‌جویی در حافظه کامپیوتر و بالا بردن سرعت محاسبات، تنها می‌توانیم در نواحی نزدیک دیواره و در جهت عمود بر آن به فشردگی شبکه بپردازیم. از آنجایی حتی در مورد حل معادلات ناویر استوکس کامل نیز جملات لزج مربوط به مشتقات در راستای سطح در اکثر مواقع به دلیل کافی نبودن شبکه و کوچکی آن‌ها به درستی محاسبه نمی‌گردند، می‌توانیم از این جملات در مورد جریان‌هایی که دارای جدایی نبوده یا جدایی خفیفی دارند صرف نظر نماییم.

در تئوری لایه مرزی، با استفاده از مقایسه مرتبه‌ای جملات بدون بعد، از جملات لزج در جهت جریان نسبت به جملات لزج در راستای عمودی صرف نظر می‌نماییم. در معادلات ناویر استوکس لایه نازک نیز از یک چنین تعبیری استفاده می‌نماییم. در ساده‌سازی معادلات لایه نازک موارد زیر را بایستی مورد توجه قرار دهیم:

- خطوط شبکه در نزدیکی دیواره بایستی به اندازه کافی فشردگی گردند.
- از همه مشتقات لزج در راستای ξ بایستی صرف نظر نموده و تنها جملات در راستای η مورد استفاده قرار گیرند. همه جملات غیرلزج نیز مورد محاسبه قرار می‌گیرند.

تقریب معادلات لایه نازک با تقریب لایه مرزی دارای این تفاوت می‌باشد که در این تقریب برخلاف تقریب لایه مرزی معادله مومنتوم در راستای عمود بر دیواره نیز در حل دخالت دارد. تقریب لایه نازک را تنها برای جریان‌های با اعداد رینولدز بالا می‌توانیم به کار ببریم و در جریان‌های با جدایش زیاد نمی‌توان از این تقریب استفاده نمود. اما در سایر موارد این روش بسیار دقیق بوده و استفاده از آن به دلیل کاهش مقدار محاسبات به صرفه می‌باشد.

۴.۴.۱ فرمولاسیون لایه نازک برای معادلات ناویراستوکس

با به‌کار بردن تقریب لایه نازک برای معادلات (۴.۹)، (۴.۱۰)، (۴.۱۱) و (۴.۱۳) و صرفنظر نمودن از همه مشتقات لزج مربوط به ξ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = \frac{1}{Re} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \eta} \quad (4.13)$$

که در آن $\hat{S}$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\hat{S} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_x m_1 + \eta_y m_2 \\ \eta_x m_2 + \eta_y m_3 \\ \eta_x (um_1 + vm_2 + m_4) + \eta_y (um_2 + vm_3 + m_5) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} m_1 &= \mu(\eta_x u_\eta - \eta_y v_\eta) / \gamma \\ m_2 &= \mu(\eta_y u_\eta + \eta_x v_\eta) \\ m_3 &= \mu(-\eta_x u_\eta + \eta_y v_\eta) / \gamma \\ m_4 &= \frac{\mu}{Pr(\gamma - 1)} (\eta_x \frac{\partial a^2}{\partial \eta}) \\ m_5 &= \frac{\mu}{Pr(\gamma - 1)} (\eta_y \frac{\partial a^2}{\partial \eta}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

حال که معادلات حاکم بر مسئله را به‌دست آوردیم، به گسسته‌سازی آن‌ها با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم می‌پردازیم. برای سادگی علامت $\hat{\cdot}$ را در معادلات آتی حذف می‌نماییم.

۴.۵ فرمولاسیون فشرده برای گسسته‌سازی معادلات

در تحقیق حاضر از روابط فشرده مرکزی مرتبه چهارم مانند رابطه (۴.۱۶) استفاده می‌نماییم:

$$\frac{f'_{i+1} + 4f'_i + f'_{i-1}}{6} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^4) \quad (4.16)$$

در رابطه بالا علامت پریم نشان دهنده مشتق و h بیان کننده فاصله نقاط شبکه از یکدیگر می‌باشد. رابطه (۴.۱۶) را می‌توانیم به شکل اپراتوری زیر نیز بنویسیم. این شیوه نمایش، عملیات گسسته‌سازی را بسیار ساده‌تر می‌نماید.

$$f'_i = Q_x^{-1} D_{ox} f_i \quad (4.17)$$

در رابطه بالا x جهت فرضی می‌باشد. اپراتورهای به‌کار رفته در معادله (۴.۱۷) در جهت ξ به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} Q_{\xi} f_i &= \frac{f_{i+1} + 4f_i + f_{i-1}}{6} \\ D_{o\xi} f_i &= \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \end{aligned}$$

در این روابط برای سادگی از اندیس j صرف‌نظر نموده‌ایم. در جهت η نیز از روابط مشابه زیر استفاده می‌نماییم:

$$\begin{aligned} Q_{\eta} f_j &= \frac{f_{j+1} + 4f_j + f_{j-1}}{6} \\ D_{o\eta} f_j &= \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h} \end{aligned}$$

در این روابط نیز برای سادگی از اندیس i صرف‌نظر نموده‌ایم. معادله (۴.۱۳) را می‌توانیم براساس روش بیم و وارمینگ به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\left\{ I + \frac{\partial A^n}{\partial \xi} \right\} \left\{ I - \Delta t \left(\frac{\partial B^n}{\partial \eta} - \frac{\partial M^n}{\partial \eta} \frac{1}{Re} \right) \right\} \Delta Q = RHS \quad (4.18)$$

در معادله بالا RHS به‌صورت زیر می‌باشد:

$$RHS = -\Delta t \left[\frac{\partial F^n}{\partial \xi} + \frac{\partial G^n}{\partial \eta} - \frac{1}{Re} \frac{\partial S_r}{\partial \eta} \right] \quad (4.19)$$

در این معادلات A ، B و M به‌صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial E}{\partial Q} \\ B &= \frac{\partial F}{\partial Q} \\ M &= \frac{\partial S}{\partial Q} \end{aligned} \quad (4.20)$$

برای حل معادلات (۴.۱۸) و (۴.۱۹) به‌صورت زیر عمل می‌نماییم:

جاروی ξ

$$\left\{ I + \frac{\partial A^n}{\partial \xi} \right\} \Delta Q^* = RHS \quad (4.21)$$

جاروی η :

$$\left\{ I + \Delta t \left[\frac{\partial B}{\partial \eta} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial M}{\partial \eta} \right)^n \right] \right\} \Delta Q^n = \Delta U^* \quad (4.22)$$

در معادله بالا $Q^{n+1} = Q^n + \Delta Q^n$ می‌باشد. با جایگذاری رابطه (۴.۱۷) به جای عبارات مشتق نسبت به ξ در معادله (۴.۲۲)، آن را به صورت اپراتوری بازنویسی می‌نماییم:

$$\left\{ I + \Delta t Q_{\xi}^{-1} D_{o\xi} A^n \right\} \Delta Q^* = -\Delta t \left\{ Q_{\xi}^{-1} D_{o\xi} F^n + \frac{\partial G^n}{\partial \eta} - \frac{1}{Re} \frac{\partial S_{\eta}^n}{\partial \eta} \right\}$$

طرفین معادله بالا را در Q_{ξ} ضرب می‌نماییم:

$$\left\{ Q_{\xi} + \Delta t D_{o\xi} A^n \right\} \Delta Q^* = -\Delta t \left\{ D_{o\xi} F^n + Q_{\xi} \frac{\partial G^n}{\partial \eta} - Q_{\xi} \frac{1}{Re} \frac{\partial S_{\eta}^n}{\partial \eta} \right\} \quad (۴.۲۳)$$

با جایگذاری رابطه (۴.۱۸) به جای عبارات مشتق نسبت به η در معادله (۴.۲۳)، آن را به صورت اپراتوری بازنویسی می‌نماییم:

$$\left\{ I + \Delta t Q_{\eta}^{-1} D_{o\eta} (B - \frac{1}{Re} M) \right\} \Delta Q = \Delta Q^*$$

طرفین معادله بالا را در Q_{η} ضرب می‌نماییم:

$$\left\{ Q_{\eta} + \Delta t D_{o\eta} (B - \frac{1}{Re} M) \right\} \Delta Q = Q_{\eta} \Delta Q^* \quad (۴.۲۴)$$

معادله (۴.۲۳) را با استفاده از تعریف اپراتورهای آن باز کرده به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\left(-\frac{\Delta t}{2} A_{i-1} + \frac{1}{6} \right) \Delta Q_{i-1}^* + \frac{2}{3} \Delta Q_i^* + \left(\frac{\Delta t}{2} A_{i+1} + \frac{1}{6} \right) \Delta Q_{i+1}^* = RHS \quad (۴.۲۵)$$

عبارات مربوط به مشتق η در سمت راست معادله (۴.۲۵) به صورت صریح و از تکرار مرحله قبل به دست می‌آیند. برای محاسبه آن‌ها تغییر متغیرهای زیر را معرفی می‌نماییم:

$$C = \frac{\partial G}{\partial \eta}, \quad D = \frac{\partial S}{\partial \eta}$$

با معرفی این متغیرهای جدید سمت راست معادله (۴.۲۵) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$RHS = -\Delta t \left\{ \frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2} + \frac{C_{i+1}^n + 4C_i^n + C_{i-1}^n}{6} - \frac{D_{i+1}^n + 4D_i^n + D_{i-1}^n}{6Re} \right\}$$

برای محاسبه مقادیر C و D در هر بار تکرار از روش فشرده (۴.۱۶) و در مرزها از تفاضل یکسویه فشرده زیر استفاده می‌نماییم:

$$\begin{aligned} f'_j + 2f'_{j+1} &= \frac{-5f_j + 4f_{j+1} + f_{j+2}}{2} \\ 2f'_j + f'_{j-1} &= \frac{5f_j - 4f_{j-1} - f_{j-2}}{2} \end{aligned} \quad (۴.۲۶)$$

از حل دستگاه سه قطری حاصل مقادیر C و D در تمام نقاط میدان به دست می آیند. معادله (۴.۲۴) را با استفاده از تعریف اپراتورهای آن باز کرده به صورت زیر می نویسیم:

$$\left[-\frac{\Delta t}{2}(B_{j-1} - \frac{1}{Re}M_{j-1}) + \frac{1}{6}\right] \Delta Q_{j-1}^* + \frac{2}{3} \Delta Q_j^* + \left[\frac{\Delta t}{2}(B_{j+1} - \frac{1}{Re}M_{j+1}) + \frac{1}{6}\right] \Delta Q_{j+1}^* = \frac{\Delta Q_{j+1}^* + 4\Delta Q_j^* + \Delta Q_{j-1}^*}{6} \quad (4.27)$$

در این معادله، I ماتریس یکه از مرتبه چهارم می باشد. برای حل این معادلات از الگوریتم بلوکی سه قطری توماس استفاده می نماییم.

۴.۶ جملات اتلافی مصنوعی

برای از بین بردن امواج فرکانس بالای ناشی از اندرکنش جملات غیرخطی و پایدار نمودن حل عددی و از آنجایی که روش های تفاضل محدود مرکزی دارای استهلاك ذاتی نمی باشند، مجبور به استفاده از جملات استهلاكی مصنوعی می باشیم. برای این منظور از مدل پیشنهادی پولیام که مدل تغییر یافته ای از روش جیمسون برای روش های تفاضل محدود می باشد استفاده می نماییم. این نوع استهلاك عددی، مدل استهلاك مصنوعی غیرخطی نامیده می شود که ترکیبی از اپراتورهای مرتبه دو و شش می باشد. فرمولاسیون این مدل به صورت زیر است:

$$\nabla_{\xi} \left(\sigma_{i+1,j} J_{i+1,j}^{-1} + \sigma_{i,j} J_{i,j}^{-1} \right) \left(\epsilon_{i,j}^{(2)} \Delta_{\xi} Q_{i,j} - \epsilon_{i,j}^{(6)} \Delta_{\xi} \nabla_{\xi} \Delta_{\xi} \nabla_{\xi} \Delta_{\xi} Q_{i,j} \right) \quad (4.28)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \epsilon_{i,j}^{(2)} &= k_2 \Delta t \max(\Upsilon_{i+1,j}, \Upsilon_{i,j}, \Upsilon_{i-1,j}) \\ \Upsilon_{i,j} &= \frac{|p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}|}{|p_{i+1,j} + 2p_{i,j} + p_{i-1,j}|} \\ \epsilon_{i,j}^{(6)} &= \max(0, k_6 \Delta t - \epsilon_{i,j}^{(2)}) \end{aligned} \quad (4.29)$$

مقادیر معمول برای $k_2 = 1/4$ و $k_6 = 1/100$ می باشند. جملات مشابهی نیز برای راستای η به کار می روند که تکرار آن ها ضرورتی ندارد. جمله $\sigma_{i,j}$ جمله مربوط به شعاع طیفی^۳ می باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sigma_{i,j} = |U| + a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \quad (4.30)$$

که شعاع طیفی ماتریس A می‌باشد. شعاع طیفی ماتریس B را برای جهت η مورد استفاده قرار می‌دهیم. جمله اول مربوط به معادله (۴.۲۸) جمله اتلافی مرتبه دو می‌باشد که در یک جمله گرادیان فشار نرمال شده ضرب گردیده است. این ضریب باعث می‌شود تا در نواحی که گرادیان فشار زیاد می‌باشد، این جمله اثر بیشتری داشته باشد. جمله دوم، یک جمله مرتبه شش می‌باشد که نحوه محاسبه ضریب آن به گونه‌ای می‌باشد که در نواحی با گرادیان فشار بالا که جمله مرتبه دوم فعال می‌باشد، به شکل اتوماتیک غیرفعال می‌گردد.

۴.۷ شرایط مرزی

در سطح صفحه، شرط عدم لغزش را برای مولفه‌های سرعت اعمال می‌نماییم:

$$u = v = 0$$

برای فشار، از شرط تعادل استفاده می‌نماییم، این شرط در حالت کلی به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{(\eta_x^2 + \eta_y^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \frac{\partial p}{\partial \xi} (\eta_x^2 + \eta_y^2) \frac{\partial p}{\partial \eta} \right\} = 0$$

در مورد صفحه تخت این معادله به صورت ساده زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0$$

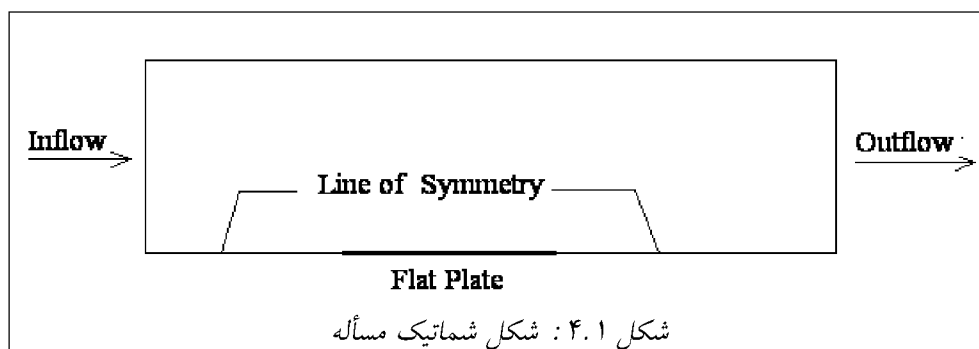
با فرض مشابهی، با توجه به اینکه سطح صفحه تخت عایق فرض شده است، برای شرط مرزی مربوط به دما خواهیم داشت:

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = 0$$

در مرز ورودی جریان و مرز بالایی، از شرایط جریان آزاد استفاده می‌نماییم. در نقاط واقع بر مرز پایینی که بر روی صفحه تخت قرار ندارند نیز از شرط تقارن برای همه متغیرها استفاده می‌نماییم. در مرز سمت راست نیز از برون‌یابی متغیرها و تئوری مشخصه‌ها استفاده می‌نماییم.

۴.۸ شبکه مورد استفاده

برای تولید شبکه از روابط جبری استفاده می‌نماییم. برای به دست آوردن نتایج بهتر در نقاط مربوط به لبه جلویی و لبه عقبی صفحه تخت، از فشرده‌سازی استفاده می‌نماییم. این روابط به صورت زیر



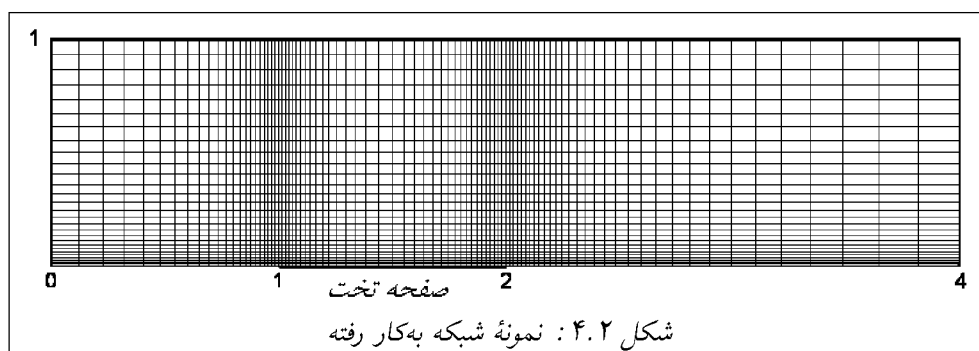
می‌باشند [۱۴]:

$$x = H \frac{(\beta + 1) - (\beta - 1) [(\beta + 1)/(\beta - 1)]^{1-\eta}}{[(\beta + 1)/(\beta - 1)]^{1-\eta} + 1}$$

$$x = D \left\{ 1 + \frac{\sinh[\beta(\eta - A)]}{\sinh(\beta A)} \right\}$$

$$A = \frac{1}{2\beta} \ln \left[\frac{1 + (e^\beta - 1)(D/H)}{1 + (e^{-\beta} - 1)(D/H)} \right]$$

در این معادلات β ضریب تراکم خطوط شبکه، H طولی از شبکه که این رابطه برای آن به کار می‌رود و D مکانی که اطراف آن بایستی خطوط شبکه فشرده گردند، می‌باشد. در شکل، نمایی از شبکه مورد استفاده برای نمونه آورده شده است.



۴.۹ نتایج

در شکل (۴.۳) نمودار حاصل از حل برای شبکه درشت نمایش داده شده است. این حل برای عدد رینولدز ۱۰۰۰۰ و عدد ماخ ۰.۱ در نظر گرفته شده است. هدف از این شکل نمایش دقت نسبی روش فشرده نسبت به روش مرتبه دو می‌باشد.

جدول ۴.۱: شبکه‌های به‌کار رفته در حل

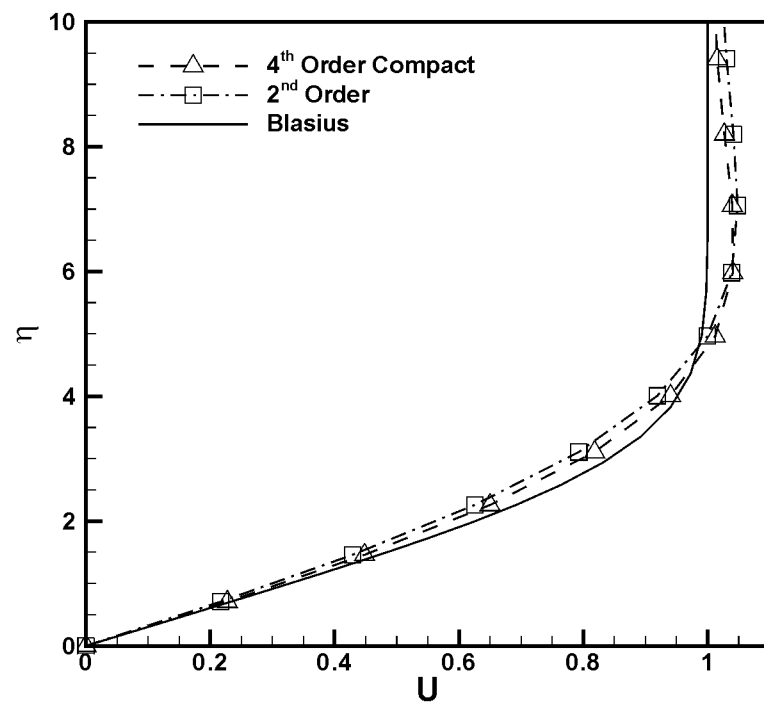
شبکه	تعداد گره‌ها	Δs
۱	60×30	۰/۰۰۵
۲	60×60	۰/۰۰۲۵
۳	230×120	۰/۰۰۰۳۲

از آزمایش عددی مشخص شده‌است که روش فشرده نسبت به فشردگی زیاد نقاط شبکه بسیار حساس است. این مطلب در مرجع [۸] نشان داده شده‌است. روش فشرده را می‌توان از این لحاظ با روش ابرفشرده^۴ مقایسه نمود (برای توضیح بیشتر در این زمینه به مرجع [۱۱] مراجعه نمایید). بنابراین برای به‌دست آوردن نتایج بهتر نمی‌توان نقاط شبکه را فشرده‌تر نمود. برای به‌دست آوردن نتایج مطلوب بایستی همواره رابطه زیر بین نقاط شبکه برقرار باشد:

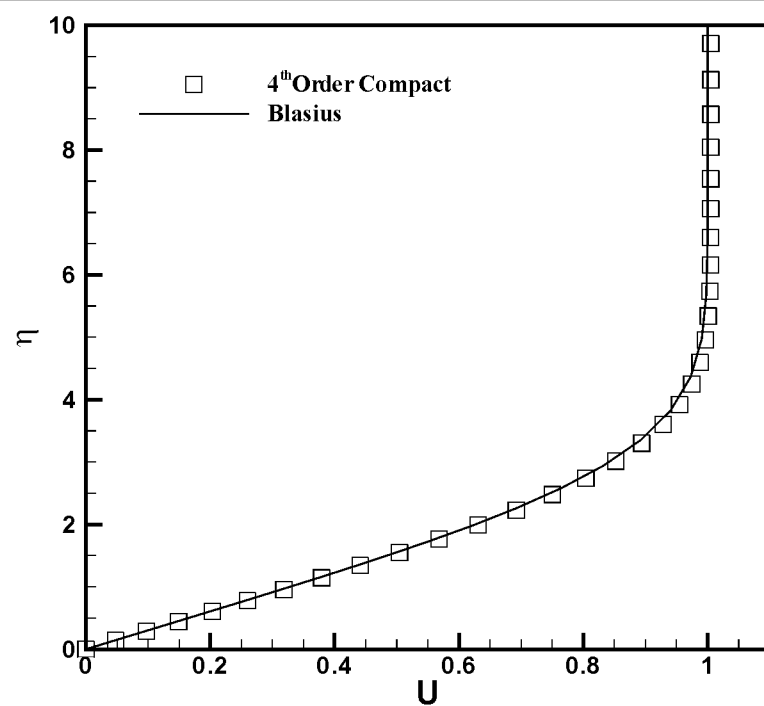
$$\frac{y_{j+1} - y_j}{y_j - y_{j-1}} < 1/05 \quad (4.31)$$

در شکل‌های (۴.۴)، (۴.۵) و (۴.۶) به‌ترتیب نمودارهای سرعت، مشتق اول سرعت و مشتق دوم سرعت برای شبکه ریز نمایش داده شده‌است. در این سه شکل عدد رینولدز برابر ۱۰۰۰۰۰ و عدد ماخ نیز ۰.۱ می‌باشد. این شبکه دارای ویژگی ذکر شده در معادله (۴.۳۱) می‌باشد. همانطور که نشان داده شده‌است، نتایج به‌خوبی بر حل بلازیوس منطبق می‌باشد. در شکل‌های (۴.۷) و (۴.۸) نمودارهای همگرایی برای مقایسه روش فشرده و روش تفاضل محدود مرتبه دوم مرکزی آورده شده‌است. همانطور که مشاهده می‌شود، سرعت همگرایی روش فشرده سریعتر از روش مرتبه دوم می‌باشد.

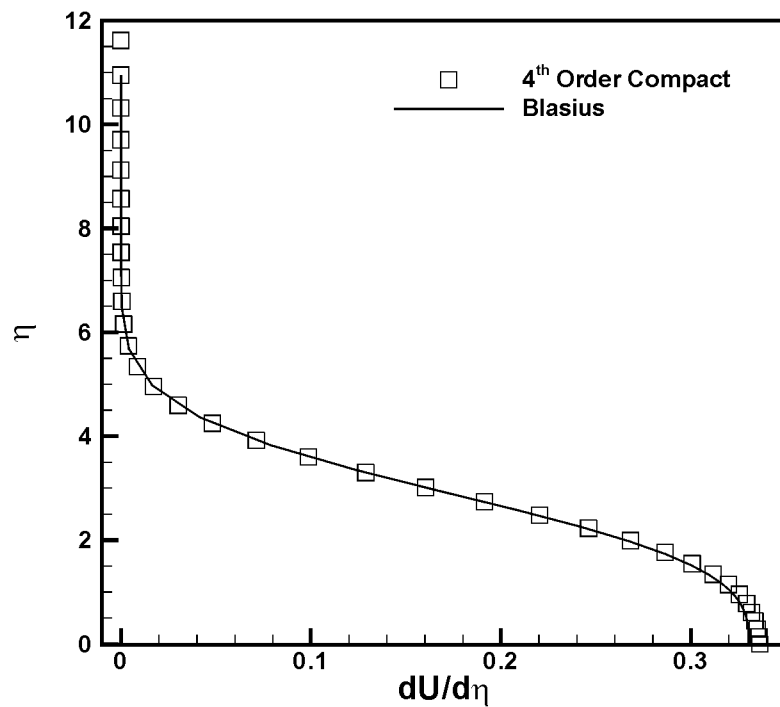
نکته آخری که در شکل (۴.۱۰) نمایش داده شده‌است، اثر مرتبه جملات استهلاکی عددی می‌باشد. همانطور که در این شکل نشان داده شده‌است، جملات استهلاکی مرتبه شش با روش فشرده هم‌خوانی بیشتری دارند. در این شکل‌ها نیز عدد رینولدز برابر ۱۰۰۰۰ و عدد ماخ برابر ۰.۱ می‌باشد.



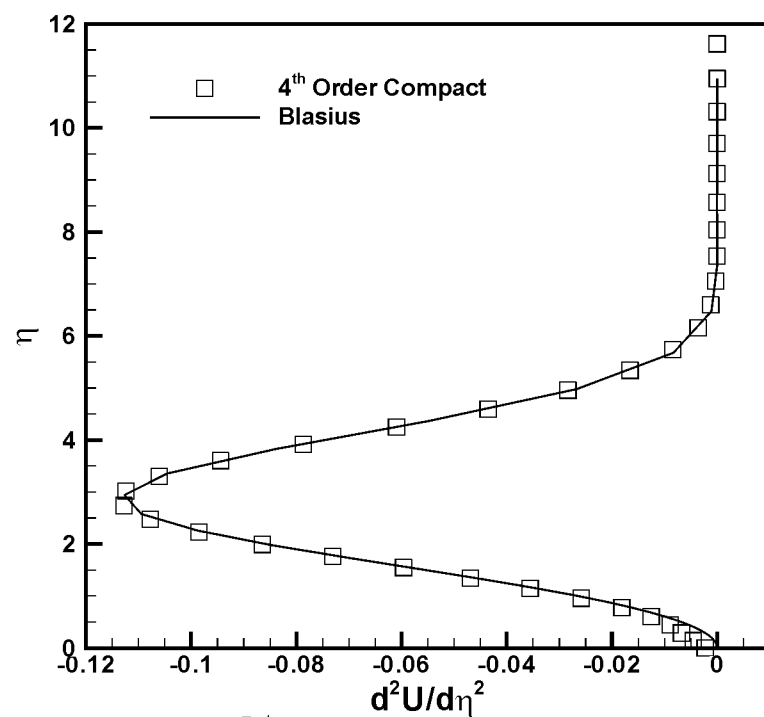
شکل ۴.۳: منحنی مولفه افقی سرعت در نقطه $x = L/2$ ، برای شبکه ۱



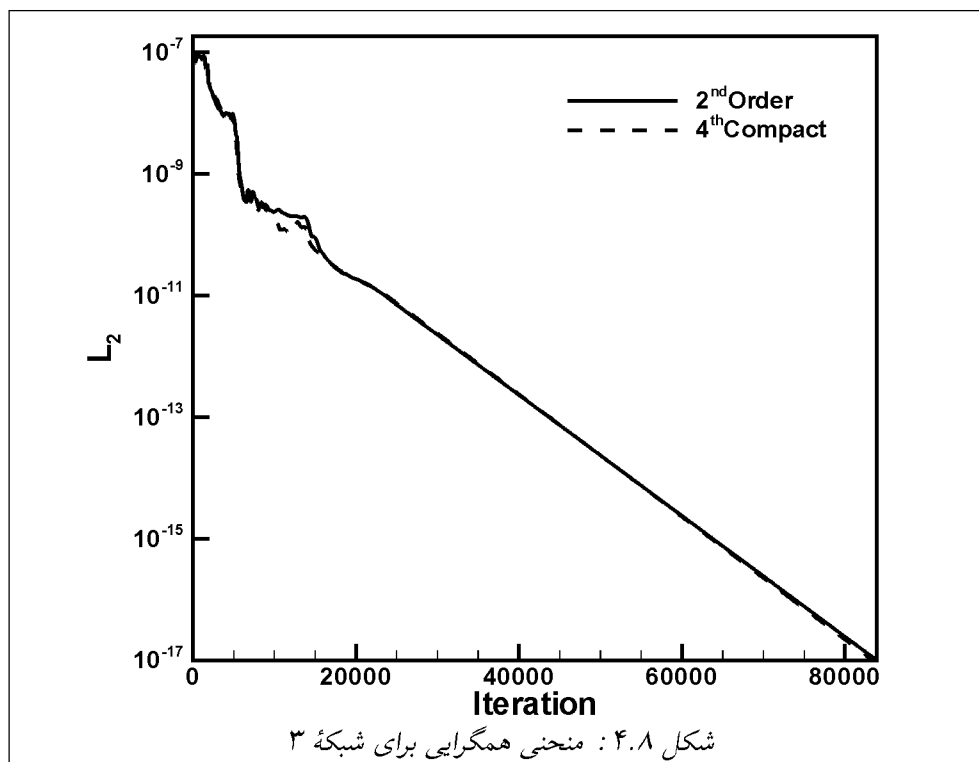
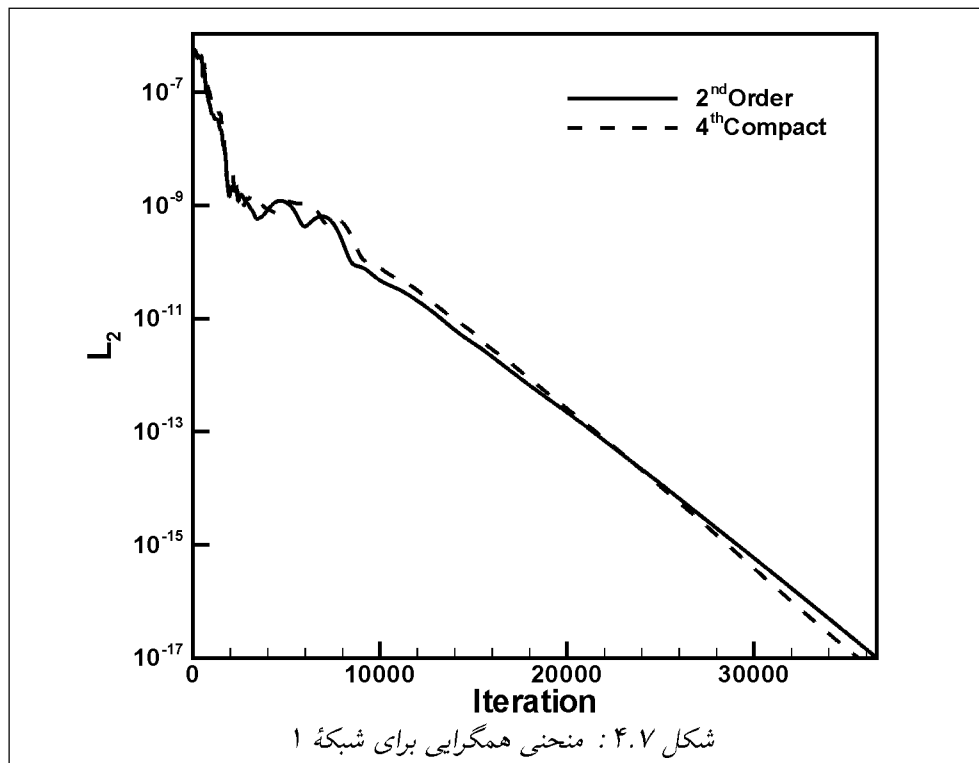
شکل ۴.۴: منحنی مولفه افقی سرعت در نقطه $x = L/2$ ، برای شبکه ۳

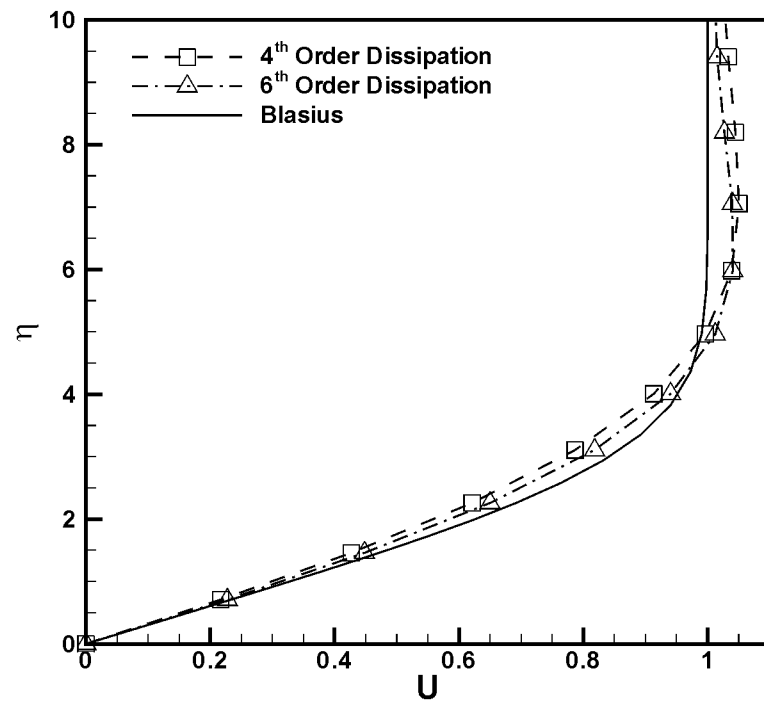


شکل ۴.۵: منحنی مشتق اول سرعت در نقطه $x = L/2$ ، برای شبکه ۳

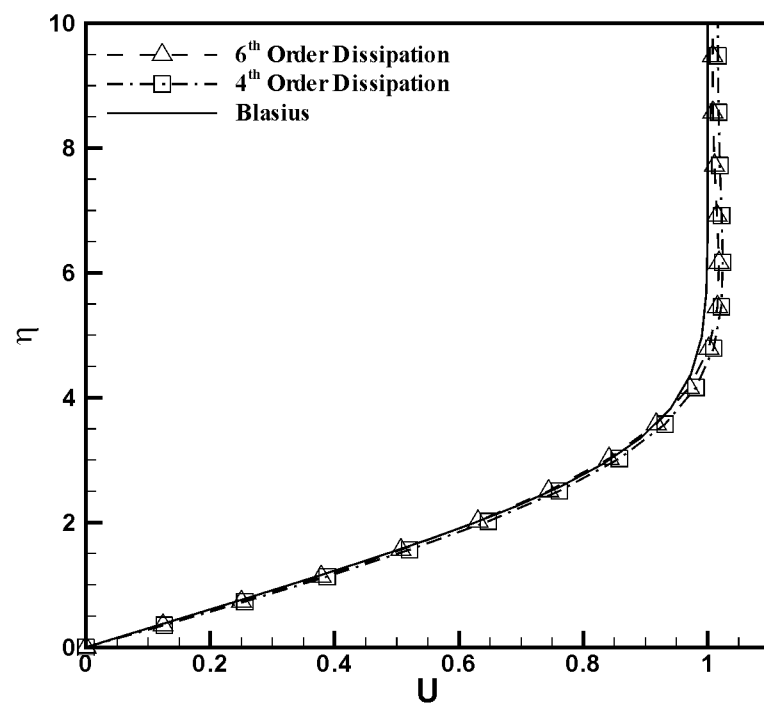


شکل ۴.۶: منحنی مشتق دوم سرعت در نقطه $x = L/2$ ، برای شبکه ۳





شکل ۴.۹: مقایسه تاثیر جملات استهلاک عددی بر دقت حل برای شبکه ۱



شکل ۴.۱۰: مقایسه تاثیر جملات استهلاک عددی بر دقت حل برای شبکه ۲

فصل ۵

بررسی فیلترهای عددی فشرده

۵.۱ مقدمه

امروزه نیاز به حل‌های عددی بسیار دقیق در بسیاری از رشته‌ها مانند: توربولانس، آتروآکوستیک و الکترومغناطیس بسیار مورد توجه قرار گرفته‌است. خطاهای استهلاک و پراکندگی ناشی از حل‌های عددی در بسیاری از روش‌های تفاضل محدود را می‌توان با بسیاری از ابزارهای مبتنی بر روش‌های طیفی و مرتبه بالا به مقدار قابل ملاحظه‌ای کاهش داد. این مساله توسط بعضی محققان مورد بررسی قرار گرفته‌است (به مراجع [۲۲] و [۲۴] مراجعه کنید). در این فصل به بررسی این ابزار که براساس روش فشرده توسعه داده می‌شود، می‌پردازیم. سپس به بررسی اثر آن بر روی حل‌های عددی خواهیم پرداخت و به‌عنوان یک مسأله نمونه، جریان بر روی صفحه تخت را که در فصل چهارم مورد بررسی قرار دادیم، مجدداً تکرار می‌نماییم. این مثال، یک مثال بسیار خوب از مسائل کاربردی بوده و اثر این‌گونه از فیلترها را بر جریان لایه مرزی به‌خوبی نمایش می‌دهد.

۵.۲ فرمولاسیون فیلتر در نقاط داخل میدان

عملکرد فیلتر عددی در کاهش ناپایداری‌های عددی ناشی از تمامی منابع از جمله یکنواخت نبودن شبکه و شرایط مرزی می‌باشد. اگر یکی از متغیرهای نمونه از حل را با ϕ و مقدار فیلتر شده آن را با $\hat{\phi}$ نمایش دهیم، رابطه فشرده زیر همواره برقرار می‌باشد:

$$\alpha_f \hat{\phi}_{i-1} + \hat{\phi} + \alpha_f \hat{\phi}_{i+1} = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{\gamma} (\phi_{i+n} + \phi_{i-n}) \quad (5.1)$$

برای اینکه معادله (۵.۱) دارای دقت $2N$ باشد، بایستی $2N + 1$ نقطه به کار گرفته شود. $N + 1$ ضریب مجهول، $a_0, a_1, \dots, a_N$ ، را می توان با نوشتن بسط تیلور و تابع طیفی^۱ مربوط به آن برحسب α_f به دست آورد. تابع طیفی برای نقاط داخل میدان به صورت زیر می باشد:

$$SF(w) = \frac{a + b \cos(w) + c \cos(2w) + d \cos(3w) + \dots}{1 + 2\alpha_f \cos(w) + 2\beta \cos(2w)}$$

این تابع از جایگزین نمودن یک مد فوریه در رابطه (۵.۱) به دست آمده است. مقادیر ضرایب مجهول در معادله (۵.۱) در جدول ۵.۱ برای مرتبه های مختلف دقت عددی برحسب α_f محاسبه شده است. نکات زیر در مورد این فیلتر ها قابل ذکر می باشد:

- برای مسائل چندبعدی فیلتر را به صورت متناوب در هر سه جهت مختصات بر روی متغیر مورد نظر اعمال می نماییم. بهتر است که عمل فیلتر بر روی متغیر پایستار صورت بگیرد.
- α_f باید در رابطه $0.5 \leq \alpha_f < 0.5 - \text{صدق نماید}$.
- هرچه مقدار α_f بزرگتر باشد، فیلتر از نظر استهلاک عددی ضعیف تر می باشد.
- اگر $\alpha_f = 0.5$ باشد، رابطه (۵.۱) تبدیل به یک تساوی شده، بنابراین هیچ گونه فیلتری صورت نمی گیرد.
- اگر $\alpha_f = 0$ باشد، فیلتر ضمنی به یک فیلتر صریح تبدیل می گردد.

۵.۳ فرمولاسیون فیلتر در مرزها

با توجه به بزرگ بودن استنسیل فیلترهای فشرده مرتبه بالا نمی توانیم از فرمولاسیون ذکر شده در بخش قبل برای نقاط مرزی استفاده نماییم. برای این مسأله دو راه حل وجود دارد، یکی اینکه از فرمولهای مرتبه پایین تری استفاده نماییم، که این کار باعث کاهش دقت عددی می گردد. دوم اینکه از فرمولاسیون یک طرفه برای این نقاط استفاده نماییم. برای این منظور از فرمولاسیون زیر استفاده می نماییم:

$$\alpha_f \hat{\phi}_{i-1} + \hat{\phi}_i + \alpha_f \hat{\phi}_{i+1} = \sum_{n=1}^{N+1} a_{n,i} \phi_n \quad i \in [2, \dots, 5]$$

جدول ۵.۱: مقادیر ضرایب فیلتر برای نقاط داخل میدان

روش	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
F_2	$\frac{1+2\alpha_f}{2}$	$\frac{1+2\alpha_f}{2}$	۰	۰	۰	۰
F_4	$\frac{5+6\alpha_f}{8}$	$\frac{1+2\alpha_f}{2}$	$-\frac{1+2\alpha_f}{8}$	۰	۰	۰
F_6	$\frac{11+10\alpha_f}{16}$	$\frac{15+24\alpha_f}{32}$	$-\frac{3+6\alpha_f}{16}$	$\frac{1-2\alpha_f}{32}$	۰	۰
F_8	$\frac{93+70\alpha_f}{128}$	$\frac{7+18\alpha_f}{16}$	$-\frac{7+14\alpha_f}{32}$	$\frac{1-2\alpha_f}{16}$	$-\frac{1+2\alpha_f}{128}$	۰
F_{10}	$\frac{193+126\alpha_f}{256}$	$\frac{105+302\alpha_f}{256}$	$-\frac{15+30\alpha_f}{64}$	$\frac{45+90\alpha_f}{512}$	$-\frac{5+10\alpha_f}{256}$	$\frac{1-2\alpha_f}{512}$

$$\alpha_f \hat{\phi}_{i-1} + \hat{\phi}_i + \alpha_f \hat{\phi}_{i+1} = \sum_{n=0}^N a_{IL-n,i} \phi_{IL-n} \quad i \in [IL-4, \dots, IL-1] \quad (5.2)$$

این فرمولاسیون سه قطری می باشد و همانطور که ملاحظه می گردد، سمت چپ آن با فرمولاسیون داخل میدان هم خوانی کامل دارد. برای محاسبه ضرایب مجهول در این معادله نیز مانند معادله (۵.۲) عمل می نماییم ولی از آنجایی که دیگر فرمولاسیون دارای تقارن نمی باشد، انتظار داریم تا ضرایب با آنچه در جدول ۵.۱ آمده است کاملاً متفاوت باشد.

تابع طیفی برای این فرمولاسیون به صورت زیر می باشد:

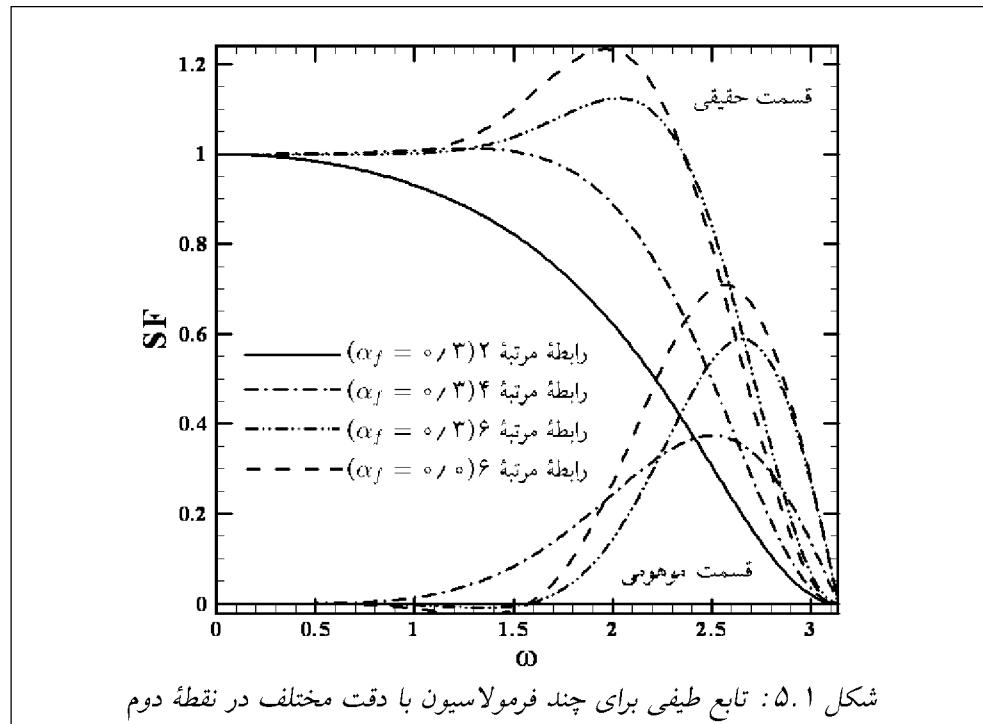
$$SF(w) = \frac{\sum_{n=1}^{N+1} a_{n,i} \{ \cos[(n-i)w] + I \sin[(n-i)w] \}}{1 + 2\alpha_f \cos(w)} \quad (5.3)$$

در این معادله، $I = \sqrt{-1}$ و $w = 2\pi kh/L$ می باشد. برای تمامی فیلترهایی که در این فصل مورد استفاده قرار می گیرند، از شرط $Real[SF(\pi)]$ استفاده گردیده است. همچنین N نشان دهنده مرتبه فرمولاسیون مرزی مورد نظر می باشد. مقادیر ضرایب مجهول در معادله (۵.۳) در جداول ۵.۲، ۵.۳ و ۵.۴ برای فرمولاسیون تا دقت مرتبه ۱۰ آورده شده است. این مقادیر برای نقاط مرزی سمت چپ می باشند. برای نقاط مرزی سمت راست نیز از رابطه زیر استفاده می نماییم:

$$a_{IL-n,i} = a_{n+1,IL-i+1} \quad i \in \{IL-4, \dots, IL-1\} \quad (5.4)$$

قسمت های حقیقی و موهومی تابع طیفی برای چند نوع فیلتر برای نقطه مرزی دوم در شکل ۵.۱ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می شود، روش های مرتبه بالا نسبت به سایر روش ها، در محدوده $w < 1/2$ فیلترهای پایین گذر بهتری می باشند. موارد زیر در مورد فیلترهای فشرده بایستی همواره مد نظر قرار داد:

- فیلترهای عددی ضمنی، به علت یک سوپیه بودن در مرزها دارای خطای پراکندگی می باشند. این خطا در شکل ۵.۱ مشخص می باشد.
- هرچه مرتبه روش بالاتر باشد، میزان این خطا بیشتر می باشد. البته آزمایش عددی نشان می دهد که اثر این خطا به صورت محلی بوده و محدود به چند نقطه از شبکه می باشد.
- برای یک دقت عددی، فیلترهای ضمنی ($\alpha_f \neq 0$) نسبت به فیلترهای صریح $\alpha = 0$ از لحاظ خطای پراکندگی عددی، بهتر می باشند.



۵.۴ حل جریان بر روی صفحه تخت با استفاده از روش فشرده و استفاده از فیلتر

در این بخش حل جریان بر روی صفحه تخت که در فصل چهارم مورد بررسی قرار گرفت مجدداً و برای بررسی اثر فیلتر بر روی حل آن تکرار می گردد. همانطور که گفته شد، این حل با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم صورت گرفته است. برای این مساله از فیلتر مرتبه ده در داخل میدان و

جدول ۵.۲: مقادیر ضرایب فیلتر برای روش‌های مرتبه ۸ و ۱۰

روش مرتبه ۱۰				
نقطه شبکه	۱	۲	۳	۴
$a_{1,2}$	$\frac{1+1022\alpha_f}{1024}$	$\frac{-1+2\alpha_f}{1024}$	$\frac{1-2\alpha_f}{1024}$	$\frac{-1+2\alpha_f}{1024}$
$a_{2,2}$	$\frac{507+10\alpha_f}{512}$	$\frac{5+502\alpha_f}{512}$	$\frac{-5+10\alpha_f}{512}$	$\frac{5-10\alpha_f}{512}$
$a_{3,2}$	$\frac{45+934\alpha_f}{1024}$	$\frac{979+90\alpha_f}{1024}$	$\frac{45+934\alpha_f}{1024}$	$\frac{-45+90\alpha_f}{1024}$
$a_{4,2}$	$\frac{-15+30\alpha_f}{128}$	$\frac{15+98\alpha_f}{128}$	$\frac{113+30\alpha_f}{128}$	$\frac{15+98\alpha_f}{128}$
$a_{5,2}$	$\frac{105-210\alpha_f}{512}$	$\frac{-105+210\alpha_f}{512}$	$\frac{105+302\alpha_f}{512}$	$\frac{407+210\alpha_f}{512}$
$a_{6,2}$	$\frac{-63+2\alpha_f}{256}$	$\frac{63-126\alpha_f}{256}$	$\frac{-63+126\alpha_f}{256}$	$\frac{63+130\alpha_f}{256}$
$a_{7,2}$	$\frac{105-210\alpha_f}{512}$	$\frac{-105+210\alpha_f}{512}$	$\frac{105-210\alpha_f}{512}$	$\frac{-105+210\alpha_f}{512}$
$a_{8,2}$	$\frac{-15+30\alpha_f}{128}$	$\frac{15-30\alpha_f}{128}$	$\frac{-15+30\alpha_f}{128}$	$\frac{15-30\alpha_f}{128}$
$a_{9,2}$	$\frac{45-90\alpha_f}{1024}$	$\frac{-45+90\alpha_f}{1024}$	$\frac{45-90\alpha_f}{1024}$	$\frac{-45+90\alpha_f}{1024}$
$a_{10,2}$	$\frac{-5+10\alpha_f}{512}$	$\frac{5-10\alpha_f}{512}$	$\frac{-5+10\alpha_f}{512}$	$\frac{5-10\alpha_f}{512}$
$a_{11,2}$	$\frac{1-2\alpha_f}{1024}$	$\frac{-1+2\alpha_f}{1024}$	$\frac{1-2\alpha_f}{1024}$	$\frac{-1+2\alpha_f}{1024}$
روش مرتبه ۸				
$a_{1,2}$	$\frac{1+127\alpha_f}{128}$	$\frac{-1+2\alpha_f}{256}$	$\frac{1-2\alpha_f}{256}$	۰
$a_{2,2}$	$\frac{31+2\alpha_f}{32}$	$\frac{1+30\alpha_f}{32}$	$\frac{-1+2\alpha_f}{32}$	۰
$a_{3,2}$	$\frac{7+25\alpha_f}{64}$	$\frac{57+14\alpha_f}{64}$	$\frac{7+50\alpha_f}{64}$	۰
$a_{4,2}$	$\frac{-7+14\alpha_f}{32}$	$\frac{7+18\alpha_f}{32}$	$\frac{25+14\alpha_f}{32}$	۰
$a_{5,2}$	$\frac{35-70\alpha_f}{128}$	$\frac{-35+70\alpha_f}{128}$	$\frac{35+58\alpha_f}{128}$	۰
$a_{6,2}$	$\frac{-7+14\alpha_f}{32}$	$\frac{7-14\alpha_f}{32}$	$\frac{-7+14\alpha_f}{32}$	۰
$a_{7,2}$	$\frac{7-14\alpha_f}{64}$	$\frac{-7+14\alpha_f}{64}$	$\frac{7-14\alpha_f}{64}$	۰
$a_{8,2}$	$\frac{-1+\alpha_f}{32}$	$\frac{1-2\alpha_f}{32}$	$\frac{-1+2\alpha_f}{32}$	۰
$a_{9,2}$	$\frac{1-2\alpha_f}{256}$	$\frac{-1+2\alpha_f}{256}$	$\frac{1-2\alpha_f}{256}$	۰

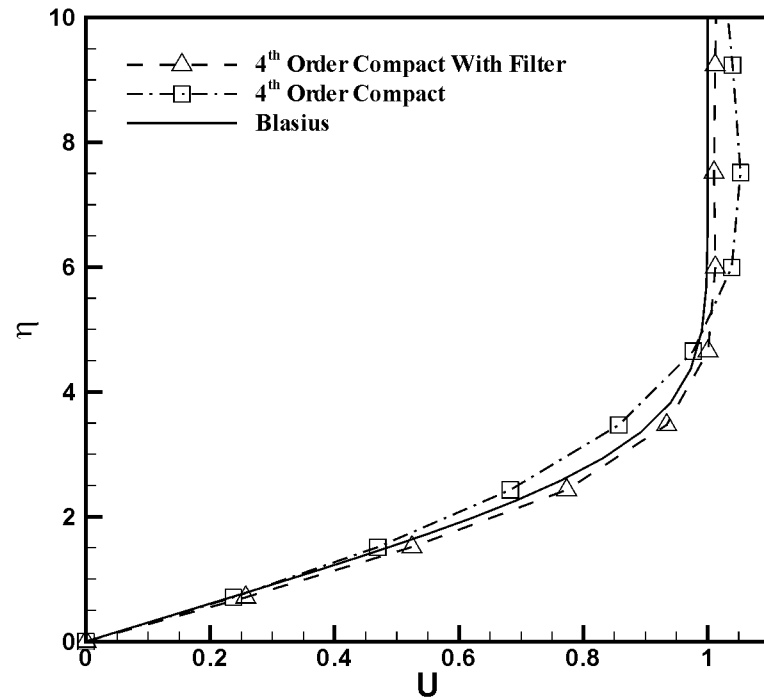
جدول ۵.۳: مقادیر ضرایب فیلتر برای روش‌های مرتبه ۴ و ۶

ضرایب نقطه ۱							
مرتبه روش	$a_{1,2}$	$a_{2,2}$	$a_{3,2}$	$a_{4,2}$	$a_{5,2}$	$a_{6,2}$	$a_{7,2}$
۴	$\frac{1+14\alpha_f}{16}$	$\frac{3+2\alpha_f}{4}$	$\frac{3+2\alpha_f}{8}$	$\frac{-1+2\alpha_f}{4}$	$\frac{1-2\alpha_f}{16}$	۰	۰
۶	$\frac{1+62\alpha_f}{64}$	$\frac{29+6\alpha_f}{32}$	$\frac{15+34\alpha_f}{64}$	$\frac{-5+10\alpha_f}{16}$	$\frac{15-30\alpha_f}{64}$	$\frac{-3+6\alpha_f}{32}$	$\frac{1-2\alpha_f}{64}$

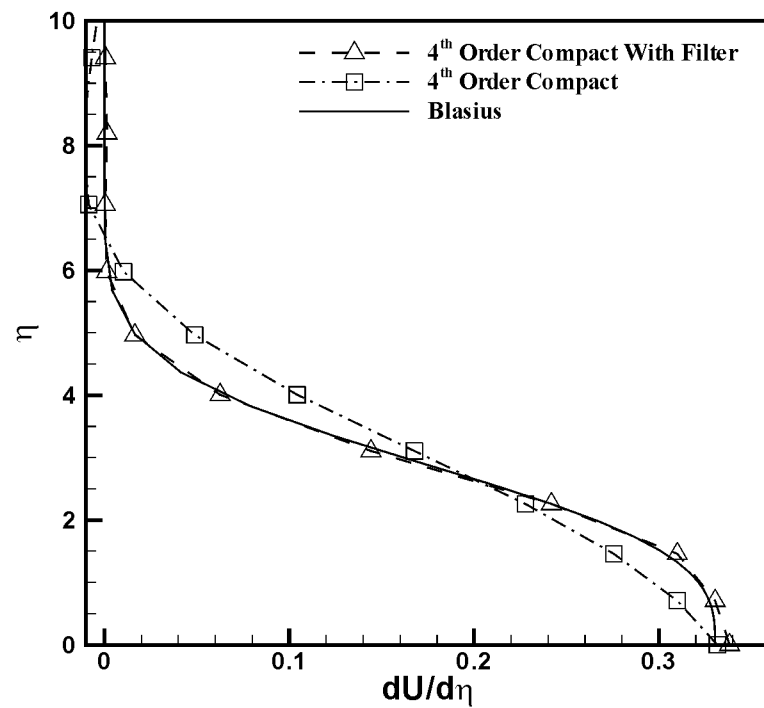
جدول ۵.۴: مقادیر ضرایب فیلتر برای روش مرتبه ۶

ضرایب نقطه ۲							
مرتبه روش	$a_{1,3}$	$a_{2,3}$	$a_{3,3}$	$a_{4,3}$	$a_{5,3}$	$a_{6,3}$	$a_{7,3}$
۶	$\frac{-1+2\alpha_f}{64}$	$\frac{3+26\alpha_f}{16}$	$\frac{49+30\alpha_f}{64}$	$\frac{5+6\alpha_f}{16}$	$\frac{-15+30\alpha_f}{64}$	$\frac{3-9\alpha_f}{32}$	$\frac{-1+2\alpha_f}{64}$

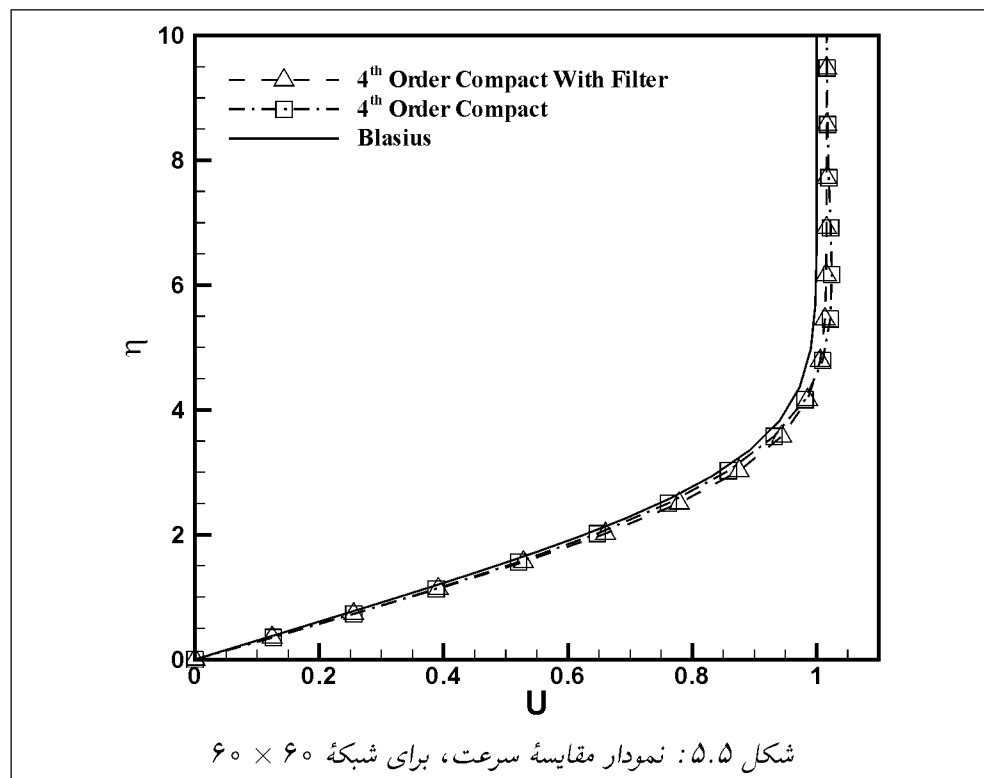
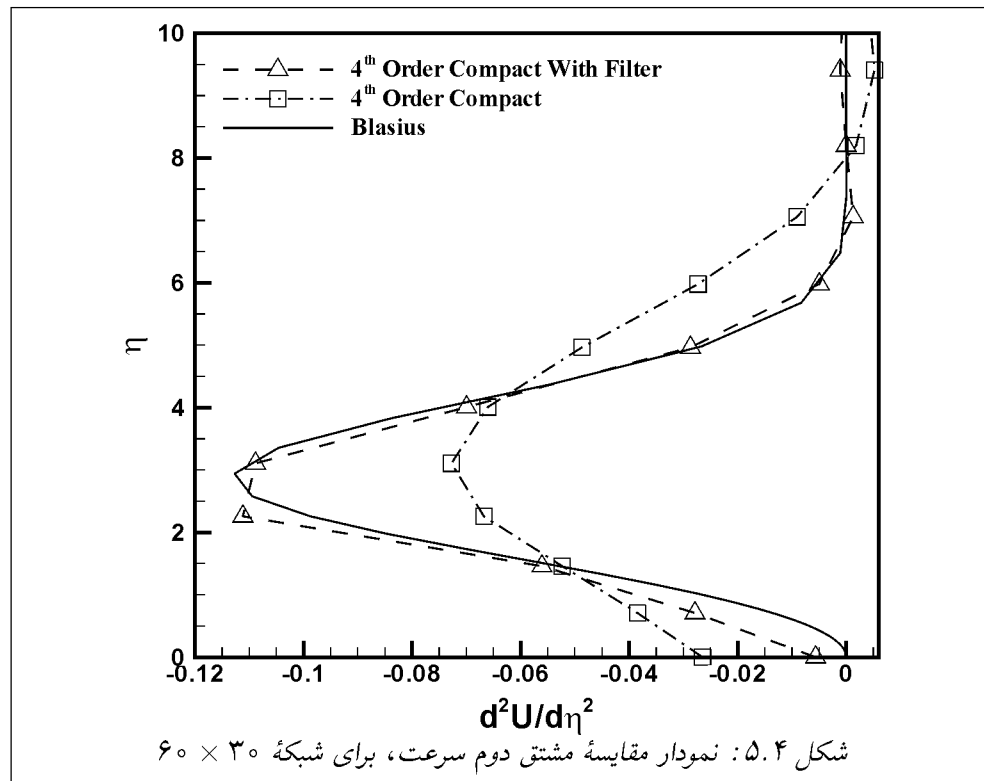
مرزها استفاده شده است. نتایج حاصل از اعمال فیلتر به همراه نتایج حاصل از به کار بردن جملات استهلاک عددی در شکل‌های ۵.۲ تا ۵.۷ نشان داده شده است. تمامی این حل‌ها برای عدد رینولدز ۱۰۰۰۰ و عدد ماخ ۰.۱ می‌باشد. سه شکل اول برای شبکه درشت می‌باشد. در سه شکل دوم، فاصله اولین نقطه شبکه از سطح صفحه تخت نصف شده است. همچنین تعداد نقاط در راستای η نیز دو برابر شده است. بنابراین هم تعداد نقاط داخل لایه مرزی زیادتر شده و همچنین نسبت اندازه دو سلول مجاور کاهش پیدا کرده است. شرایط مرزی مانند آنچه در فصل چهارم گفته شد می‌باشد. حل برای دو شبکه مختلف جهت مقایسه آورده شده است. در این شکل‌ها نمودار سرعت، مشتق اول و دوم سرعت نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، استفاده از فیلتر عددی فشرده باعث افزایش دقت عددی حل می‌گردد. این تاثیر به خصوص در نمودارهای مربوط به مشتق اول و دوم به روشنی مشهود می‌باشد. آنچه در مورد این نتایج بسیار اهمیت دارد آن است که فیلتر ما را قادر می‌سازد تا با به کار بردن تنها ده نقطه در لایه مرزی، به جواب قابل قبولی دست پیدا کنیم.

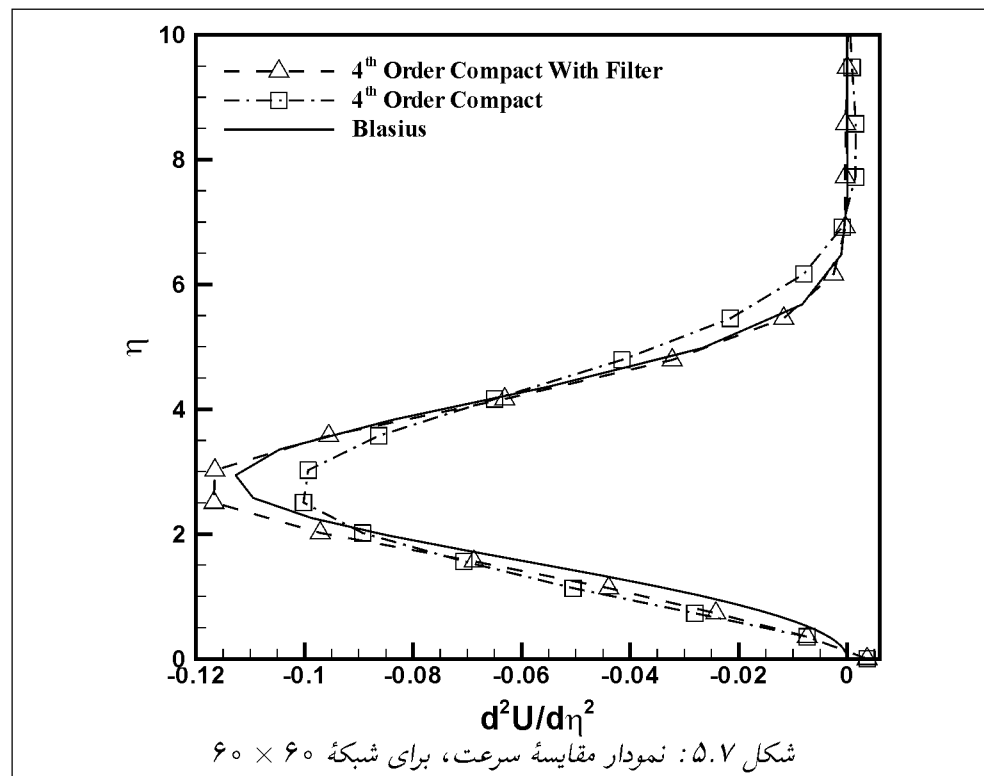
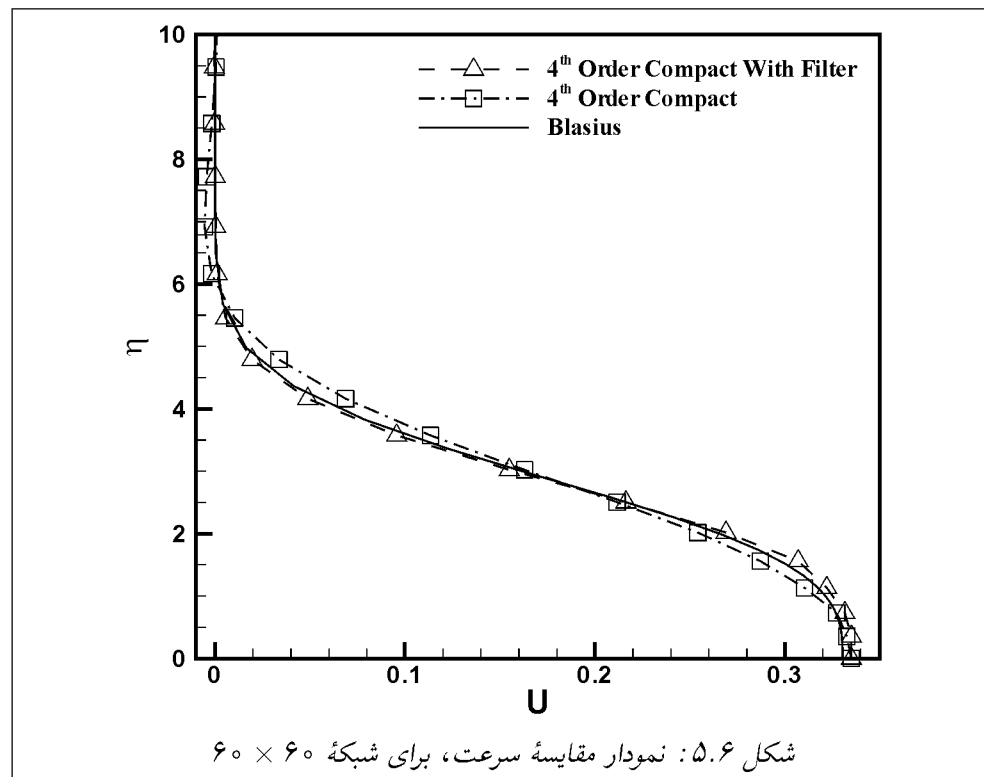


شکل ۵.۲: نمودار مقایسه سرعت، برای شبکه 60×30



شکل ۵.۳: نمودار مقایسه مشتق اول سرعت، برای شبکه 60×30





فصل ۶

حل جریان لزج بر روی ایرفویل با استفاده از فرمولاسیون فشرده

۶.۱ مقدمه

در این بخش به حل جریان پایا، تراکم‌پذیر و لزج بر روی ایرفویل $NACA_{0012}$ در رژیم جریان زیر صوت و با استفاده از فرمولاسیون فشرده خواهیم پرداخت. نحوه گسسته‌سازی معادلات در بعد مکان با استفاده از فرمولاسیون فشرده مرتبه چهارم می‌باشد. برای گسسته‌سازی زمانی نیز از فرمولاسیون مرتبه دوم بیم و وارمینگ استفاده نموده‌ایم. معادلاتی که به گسسته‌سازی آن‌ها خواهیم پرداخت، معادلات ناویراستوکس لایه‌نازک می‌باشند که در فصل چهارم به شکل مفصل درباره آن‌ها صحبت نموده‌ایم. هدف از این فصل، بررسی توانایی روش فشرده برای حل این نوع جریان‌ها می‌باشد. همچنین مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از این روش با روش‌های استاندارد مرتبه دوم و چهارم صورت خواهد گرفت.

۶.۲ تولید شبکه

روش‌های متفاوتی برای تولید شبکه وجود دارد:

۱. روش‌های کلاسیک

مبنای این روش‌ها استفاده از نگاشت همدیس می‌باشد. به‌عنوان نمونه‌ای از این تبدیلات می‌توان به تبدیل کارمن-ترفر، شوارتز-کریستوفر و تئودرسون اشاره نمود.

۲. روش استفاده از معادلات دیفرانسیل

اساس این روش، استفاده از معادلات دیفرانسیل بیضوی، سهموی و هذلولوی می‌باشد.

۳. روش‌های جبری

مبنای این روش، استفاده از میانمایی بین نقاط مرزی برای تولید شبکه می‌باشد.

در این تحقیق از روش‌های دیفرانسیلی برای تولید گره استفاده می‌شود. نوع معادلات استفاده شده نیز، معادلات دیفرانسیل بیضوی می‌باشد.

۶.۳ تولید شبکه با استفاده از معادلات بیضوی

همانطور که گفته شد، یکی از روش‌های تولید شبکه با استفاده از روش دیفرانسیلی استفاده از معادلات دیفرانسیل جزیبی بیضوی می‌باشد. شبکه‌ای که با استفاده از این روش تولید می‌شود یکنواخت بوده و یک به یک می‌باشد. البته شبکه تولیدی همواره به‌صورت دلخواه نمی‌باشد و بایستی برای ایجاد تراکم و تعامد در نقاط مرزی از روابط اضافی استفاده نمود. شبکه‌ای که در این بخش تولید می‌شود برای هندسه ایرفویل می‌باشد. ایرفویل مورد استفاده، ایرفویل $NACA_{0012}$ می‌باشد. هندسه این ایرفویل با استفاده از رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$\pm y_t = \frac{t}{0.2} (0.2969 \sqrt{x} - 0.12600x - 0.3516x^2 + 0.2843x^3 - 0.1015x^4)$$

در این معادله t حداکثر ضخامت مقطع بر واحد وتر می‌باشد. برای تولید شبکه با استفاده از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بیضوی، از معادلات زیر که معادلات پواسون می‌باشند به‌عنوان معادلات حاکم استفاده می‌نماییم (برای توضیح بیشتر به مرجع [۲۰] مراجعه نمایید):

$$\begin{aligned} \xi_{xx} + \xi_{yy} &= P(\xi, \eta), \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= Q(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (6.1)$$

در این معادلات، جملات P و Q به‌صورت زیر می‌باشند:

$$P = - \sum_{m=1}^M a_m \frac{\xi - \xi_m}{|\xi - \xi_m|} e^{-c_m |\xi - \xi_m|}$$

$$\begin{aligned}
Q = & - \sum_{i=1}^I b_i \frac{\xi - \xi_i}{|\xi - \xi_i|} e^{-d_i[(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2]^{1/2}}, \\
& - \sum_{m=1}^M a_m \frac{\eta - \eta_m}{|\eta - \eta_m|} e^{-c_m|\eta - \eta_m|} \\
& - \sum_{i=1}^I b_i \frac{\eta - \eta_i}{|\eta - \eta_i|} e^{-d_i[(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2]^{1/2}}, \quad (6.2)
\end{aligned}$$

این معادلات پس از تبدیل مختصات و در صفحه تبدیل شده به صورت زیر می باشند:

$$\begin{aligned}
\alpha x_{\xi\xi} - \gamma x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} &= -J^2 (Px_{\xi} + Qx_{\eta}), \\
\alpha y_{\xi\xi} - \gamma y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} &= -J^2 (Py_{\xi} + Qy_{\eta}), \quad (6.3)
\end{aligned}$$

در این معادلات J ، ژاکوبین تبدیل می باشد. سایر پارامترها نیز به صورت زیر می باشند:

$$\begin{aligned}
J &= x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi}, \quad \alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \\
\beta &= x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}, \quad \gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 \quad (6.4)
\end{aligned}$$

برای ایجاد فشردگی در نقاط شبکه بر روی مرزهای داخلی معادلات (۶.۳) را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned}
\alpha x_{\xi\xi} - \gamma x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} &= -J^2 (P_1 e^{-a(\eta - \eta_1)} x_{\xi} + Q_1 e^{-b(\eta - \eta_1)} x_{\eta}), \\
\alpha y_{\xi\xi} - \gamma y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} &= -J^2 (P_1 e^{-a(\eta - \eta_1)} y_{\xi} + Q_1 e^{-b(\eta - \eta_1)} y_{\eta}) \quad (6.5)
\end{aligned}$$

در این معادلات $P_1 = P(\xi, \eta_1)$ ، $Q_1 = Q(\xi, \eta_1)$ می باشند و a و b نیز مقادیر مثبتی می باشند. برای تعیین فاصله اولین خط η ثابت تا بدنه به صورت زیر عمل می نماییم:

$$\Delta s = [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{1/2}|_{\xi=const} \quad (6.6)$$

این فاصله در حد به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned}
ds &= [(dx)^2 + (dy)^2]^{1/2} \\
&= [(x_{\xi}d\xi + x_{\eta}d\eta)^2 + (y_{\xi}d\xi + y_{\eta}d\eta)^2]^{1/2} \quad (6.7)
\end{aligned}$$

با توجه به اینکه ξ در راستای η ثابت می باشد خواهیم داشت:

$$ds = [(x_{\eta})^2 + (y_{\eta})^2]^{1/2} d\eta|_{\xi=const} \quad (6.8)$$

برای ایجاد تعامد خطوط شبکه بر روی مرز جسم بایستی رابطه زیر بر روی مرز برقرار باشد:

$$\nabla \xi \cdot \nabla \eta = |\nabla \xi| |\nabla \eta| \cos \theta \quad (6.9)$$

اگر در این رابطه $\theta = \pi/2$ باشد، تعامد برقرار می‌گردد. با استفاده از رابطه $\xi_x = y_\eta/J$ و روابط مشابه آن، معادله (۶.۹) به صورت زیر در می‌آید:

$$x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta = - \left[(x_\eta^2 + y_\eta^2)(x_\xi^2 + y_\xi^2) \right]^{1/2} \cos \theta \quad (6.10)$$

در راستای $\eta = \eta_1$ مقادیر x و y مشخص هستند، بنابراین تمامی مشتقات نسبت به ξ مشخص بوده و پیوسته فرض می‌شوند. با استفاده از روابط (۶.۱۰) و (۶.۸) x_η و y_η نیز به صورت زیر مشخص می‌شوند:

$$\begin{aligned} x_\eta &= s_\eta (-x_\xi \cos \theta - y_\xi \sin \theta) / (x_\xi^2 + y_\xi^2)^{1/2}, \\ y_\eta &= s_\eta (-y_\xi \cos \theta - x_\xi \sin \theta) / (x_\xi^2 + y_\xi^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (6.11)$$

در این معادلات ξ در جهت مثلثاتی مثبت در نظر گرفته می‌شود. η نیز به سمت خارج و در جهت شعاع مثبت فرض می‌گردد. با توجه به این روابط تنها مجهولات باقی مانده در معادله (۶.۵) P_1 ، Q_1 ، $x_{\eta\eta}$ و $y_{\eta\eta}$ می‌باشند. برای محاسبه P و Q معادله (۶.۵) را به ازای $\eta = \eta_1$ محاسبه می‌نماییم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} P_1 &= J^{-1} (y_\eta R_1 - x_\eta R_2) |_{\eta=\eta_1} \\ Q_1 &= J^{-1} (-y_\xi R_1 + x_\xi R_2) |_{\eta=\eta_1} \end{aligned} \quad (6.12)$$

در این معادلات R_1 و R_2 به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} R_1 &= -J^{-2} (\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta}) |_{\eta=\eta_1} \\ R_2 &= -J^{-2} (\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta}) |_{\eta=\eta_1} \end{aligned} \quad (6.13)$$

برای حل معادلات (۶.۳) و (۶.۱۲) از روش $LSOR$ ^۱ استفاده می‌نماییم. از آنجایی که ضرایب P و Q می‌توانند بسیار بزرگ باشند، جملات x_ξ ، x_η ، y_ξ و y_η می‌توانند باعث ناپایداری حل گردند. به همین دلیل از روش‌های بادسو^۲ و پادبادسو^۳ برای گسسته‌سازی این مشتقات استفاده می‌نماییم.

$$\begin{aligned} & \text{SuccessiveLineOverrelaxation}^1 \\ & \text{Upwind}^2 \\ & \text{Downwind}^3 \end{aligned}$$

برای محاسبه مشتقات $x_{\xi\eta}$ و $y_{\eta\eta}$ بر روی سطح، از روابط زیر استفاده می‌نماییم :

$$\begin{aligned} x_{\eta\eta} &= (-\nabla x_1 + \Delta x_2 - x_3)/(\nabla \Delta \eta^2) - \nabla x_{\eta}|_1/\Delta \eta \\ y_{\eta\eta} &= (-\nabla y_1 + \Delta y_2 - y_3)/(\nabla \Delta \eta^2) - \nabla y_{\eta}|_1/\Delta \eta \end{aligned} \quad (6.14)$$

این روابط به راحتی و با استفاده از سری تیلور قابل محاسبه می‌باشند. مقادیر P و Q پس از هربار تکرار از روابط زیر محاسبه می‌گردند:

$$\begin{aligned} P_{\eta}^{(n+1)} &= P_{\eta}^{(n)} + w_p \left[J^{-1}(y_{\eta} R_1 - x_{\eta} R_2)^{(n+1)} - P_{\eta}^{(n)} \right], \\ Q_{\eta}^{(n+1)} &= Q_{\eta}^{(n)} + w_Q \left[J^{-1}(y_{\xi} R_1 - x_{\xi} R_2)^{(n+1)} - Q_{\eta}^{(n)} \right], \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$(6.16)$$

در این معادلات ضرایب w_P و w_Q مقادیر کوچکی می‌باشند. با توجه به این روابط و آنچه که گفته شد، می‌توانیم معادله (۶.۵) را حل نموده و با تعیین نقاط مرزی شبکه مورد نیاز را تولید نماییم. حال با استفاده از شبکه تولید شده و در بخش بعدی، به حل معادلات ناویر-استوکس بر روی شبکه تولید شده می‌پردازیم.

۶.۴ معادلات ناویر-استوکس لایه نازک

در این بخش معادلات ارائه شده در فصل چهارم، مجدداً تکرار می‌گردد. این روابط به صورت زیر می‌باشند:

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = \frac{1}{Re} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \eta} \quad (6.17)$$

در این معادله، تمامی بردارها مانند معادله مشابه در فصل چهارم می‌باشند. در این فصل نیز از روش ضمنی بیم-وارمینگ استفاده شده است. برای گسسته سازی مکانی نیز از روش فشردۀ مرتبۀ چهارم زیر استفاده نموده ایم:

$$\frac{f'_{i+1} + 4f'_i + f'_{i-1}}{3} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta\xi} \quad (6.18)$$

این رابطه، برای راستای ξ نوشته شده است. برای راستای η نیز از روابط مشابهی استفاده می‌شود. مانند فصل چهارم از دو مرحله برای حل استفاده می‌نماییم:

جارو در جهت ξ

$$\left\{ I + \Delta t \frac{\partial}{\partial \xi} A \right\} \Delta Q^* = RHS$$

$$RHS = -\Delta t \left(\frac{\partial}{\partial \xi} E + \frac{\partial}{\partial \eta} F - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial \eta} S \right) \quad (۶.۱۹)$$

جارو در جهت η

$$\left\{ I + \Delta t \frac{\partial}{\partial \eta} (B - \frac{1}{Re} M) \right\} \Delta Q = \Delta Q^* \quad (۶.۲۰)$$

معادلات (۶.۱۹) و (۶.۲۰) برای زمان n نوشته شده‌اند و $Q^{n+1} = Q^n + \Delta Q$ می‌باشد. گسسته‌سازی این معادلات درست مانند معادلات مشابه فصل چهارم می‌باشد. بنابراین آن‌ها را تکرار نمی‌نماییم. تنها تفاوت در نحوه اعمال شرایط مرزی می‌باشد. در بخش بعدی به بررسی شرایط مرزی برای این حل می‌پردازیم.

۶.۵ شرایط مرزی

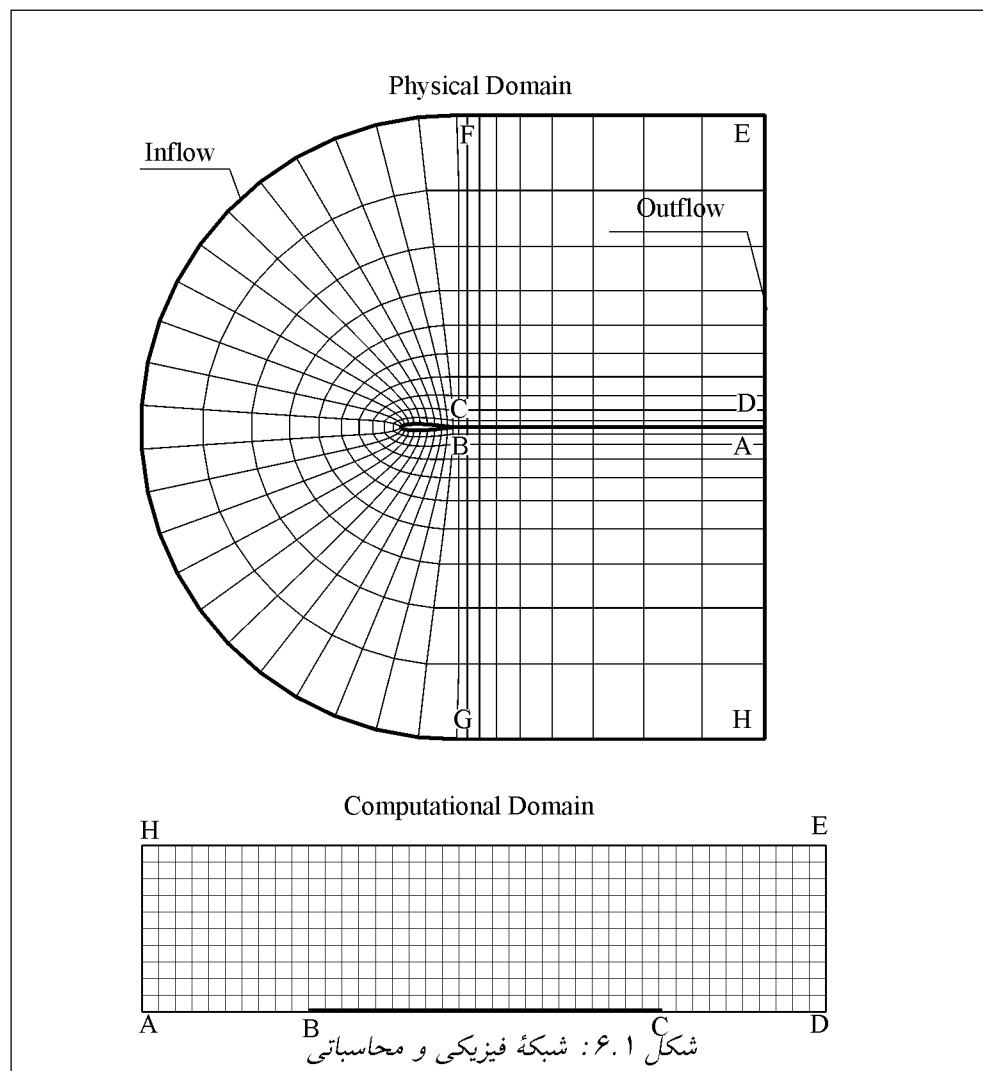
شکل شماتیک مساله در دو فضای فیزیکی و محاسباتی در شکل ۶.۱ نمایش داده شده‌است. برای اعمال شرایط مرزی در اکثر مرزها از شرط مرزی صریح استفاده می‌نماییم. به عبارت دیگر شرط مرزی در ماتریس ضرایب وارد نمی‌گردد. تنها شرط مرزی ضمنی در این مساله شرط مرزی پایین‌دست جریان می‌باشد.

۶.۵.۱ سطح جسم

این قسمت که سطح ایرفویل را شامل می‌شود، در شکل ۶.۱ با $B - C$ نمایش داده شده‌است. در این ناحیه از شرط تعامد فشار بر روی سطح استفاده می‌نماییم. این رابطه به صورت زیر می‌باشد:

$$P_n = \frac{1}{(\eta_x^2 + \eta_y^2)} \left\{ (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \frac{\partial P}{\partial \xi} + (\eta_x^2 + \eta_y^2) \frac{\partial P}{\partial \eta} \right\} = 0$$

از حل این معادله که منجر به یک دستگاه سه‌قطری می‌گردد مقادیر فشار بر روی سطح به دست می‌آید. برای دما نیز مانند معادله بالا عمل می‌نماییم، یعنی از شرط مرزی عایق برای دما استفاده می‌نماییم. در مورد سرعت نیز بر روی سطح ایرفویل شرط عدم لغزش به کار می‌رود. مقدار چگالی نیز از معادله حالت به دست می‌آید. سایر پارامترهای جریان نیز از این مقادیر محاسبه می‌گردند.



۶.۵.۲ مرزهای پایین دست جریان

در شکل ۶.۱ مرزهای پایین دست جریان با $A - H$ و $D - E$ نمایش داده شده‌اند. در این مرزها از تئوری مشخصه‌ها برای به دست آوردن مقادیر متغیرها استفاده می‌نماییم. بر این اساس ρ ، u و v از برون‌یابی نقاط مربوط و از داخل میدان به دست می‌آیند. مقدار فشار نیز ثابت در نظر گرفته می‌شود. برای برون‌یابی نیز از روابط مرتبه دوم زیر استفاده می‌نماییم:

$$\phi_I = 2\phi_{I1} - \phi_{I2}, \quad I1 = I - 1, \quad I2 = I - 2$$

در این رابطه ϕ متغیر دلخواه می‌باشد.

۶.۵.۳ مرزهای مجازی حاصل از برش

این مرزها در شکل ۶.۱ با حروف $A - B$ و $C - D$ نمایش داده شده‌اند. نقاطی که در روی این دو مرز قرار دارند، در واقع برهم منطبق بوده و مقادیر یکسانی دارند. مقادیر متغیرهای نقاط واقع بر این دو مرز با متوسط‌گیری مقادیر متغیرهای نقاط بالایی و پایینی آن‌ها به دست می‌آیند.

۶.۶ شرایط اولیه برای حل

می‌توانیم از شرایط جریان آزاد برای شرط اولیه حل استفاده نماییم. اما برای سرعت بخشیدن به فرایند حل و برای نقاطی که بین سطح ایرفویل و جریان آزاد قرار می‌گیرند از یک توزیع خطی برای شرط اولیه سرعت استفاده می‌نماییم. مقادیر سایر متغیرها را برابر مقادیر متناظرشان در جریان آزاد قرار می‌دهیم.

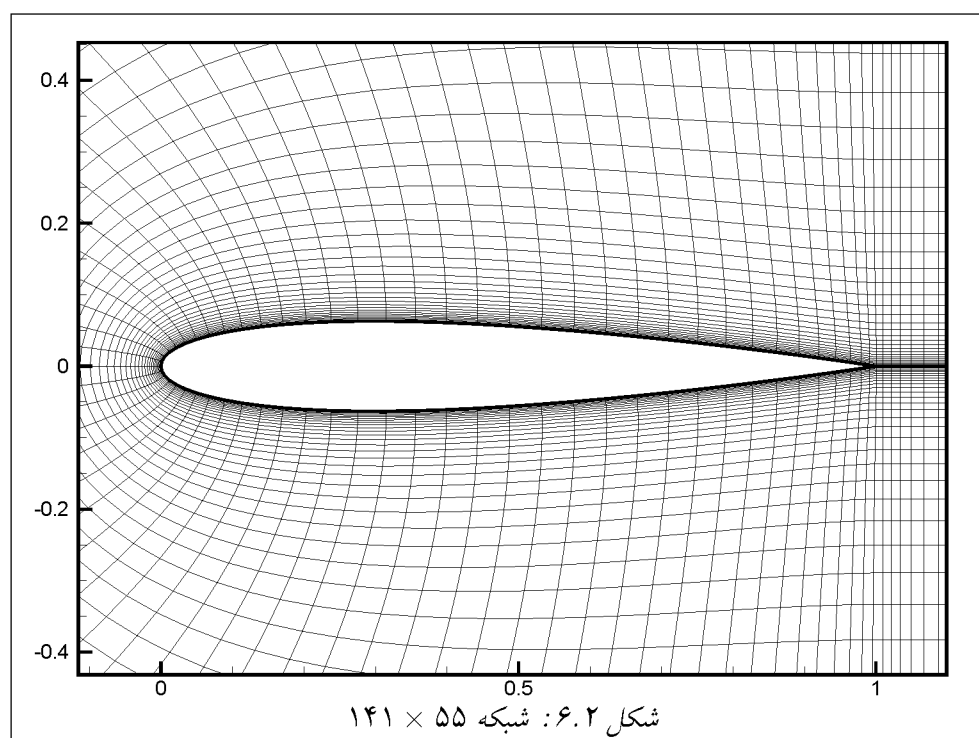
۶.۷ نتایج

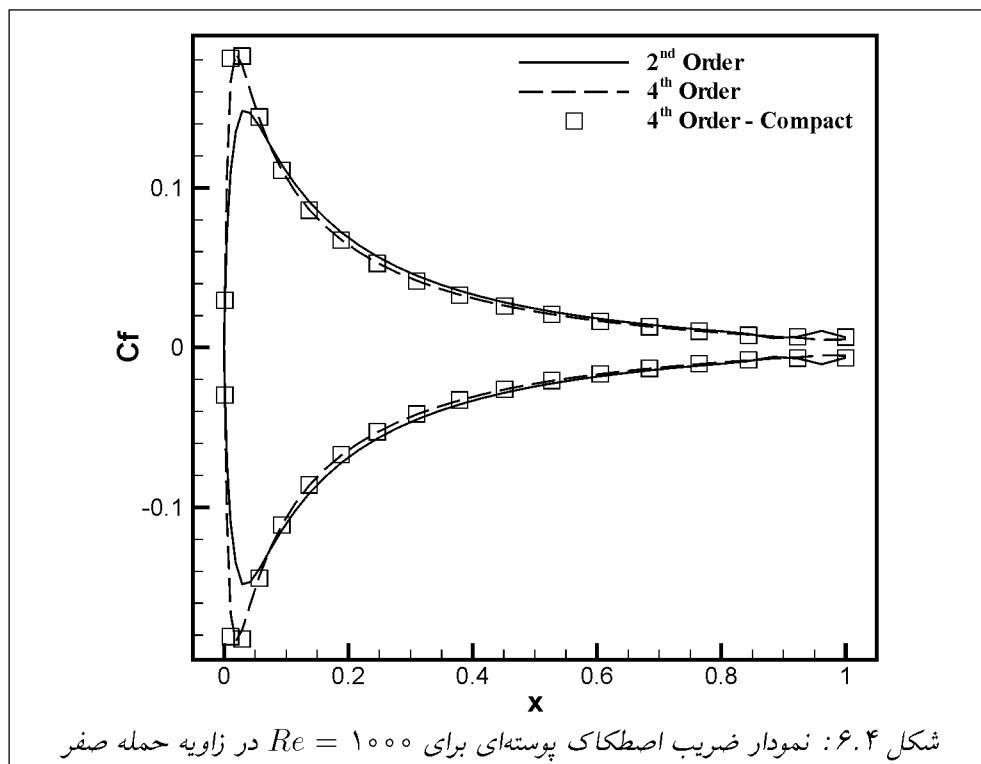
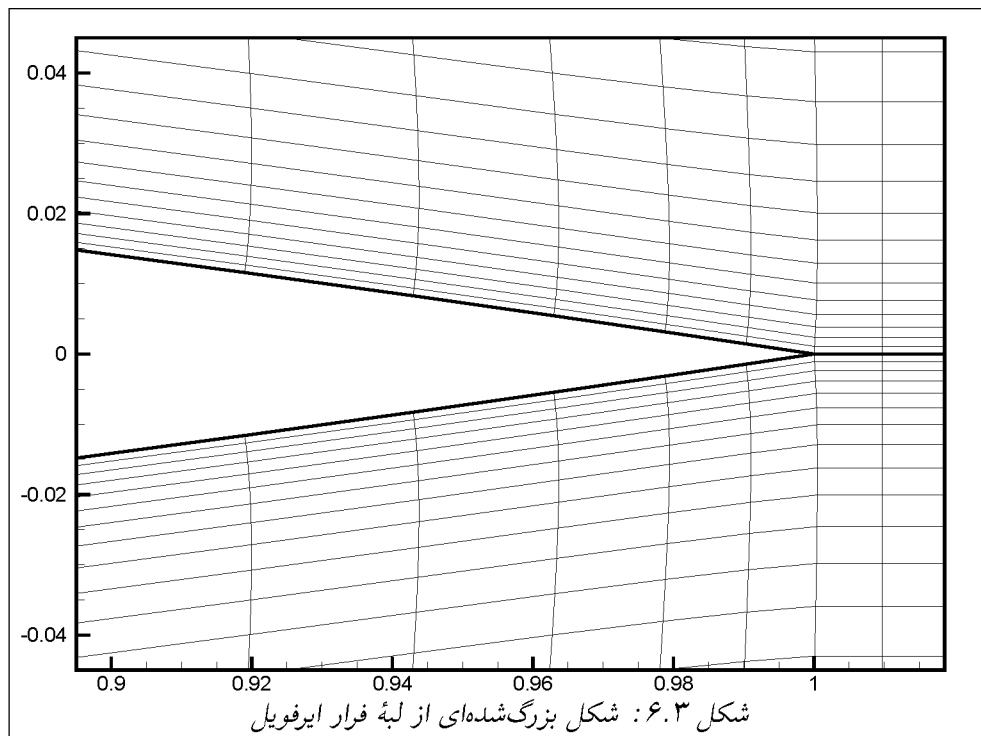
در شکل‌های ۶.۴ تا ۶.۷ نتایج حاصل از حل برای تعدادی از اعداد رینولدز و برخی زوایای حمله برای ایرفویل نشان داده شده‌است. هدف از این فصل بررسی توانایی‌های روش فشرده برای مدل‌سازی این جریان در مقایسه با روش‌های معمول می‌باشد. در جدول؟؟ نتایج حاصل از حل برای اعداد رینولدز مختلف نشان داده شده‌است. همانطور که در تمامی شکل‌ها مشخص است استفاده از روش مرتبه دوم برای گسسته‌سازی جملات لزج در معادلات ناویر-استوکس سبب بروز اشتباه در تخمین مشتق اول سرعت و در نتیجه ضریب اصطکاک پوسته‌ای می‌گردد. بنابراین تنها در چند شکل اول از

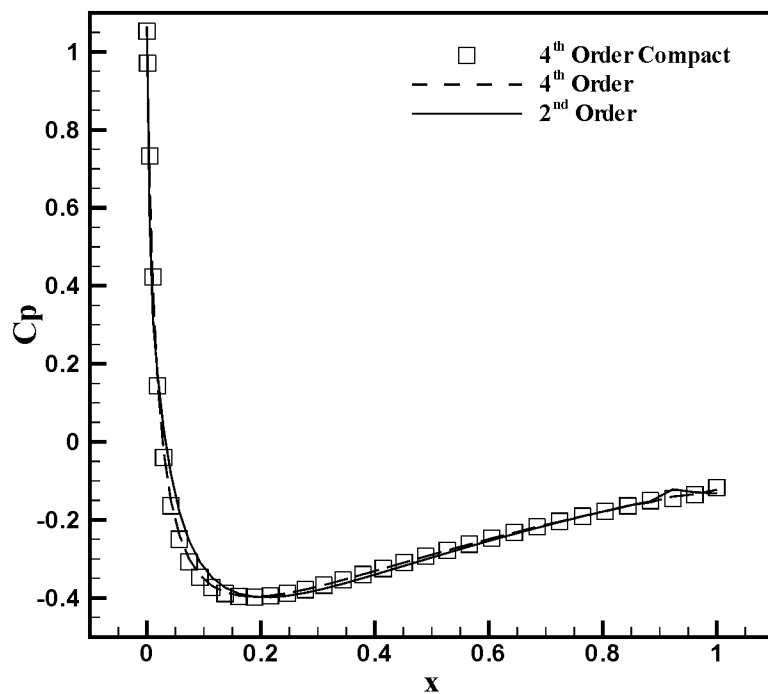
جدول ۶.۱: نتایج حاصل از حل

Re	Ma	α	ضریب پسا		ضریب برا	
			روش فشرده	مرتبه ۴	روش فشرده	مرتبه ۴
۱۰۰۰	۰/۵	۰	۰/۰۳۸۲۶۳	۰/۰۳۷۷۲۱	۰	۰
۱۰۰۰۰	۰/۵	۰	۰/۰۱۸۰۶۴	۰/۰۱۸۲۱۱	۰	۰
۱۰۰۰	۰/۵	۴	۰/۰۴۲۶۲۵	۰/۰۴۲۷۱۸	۰/۰۲۱۲۳۰۴	۰/۰۲۰۷۰۳۶

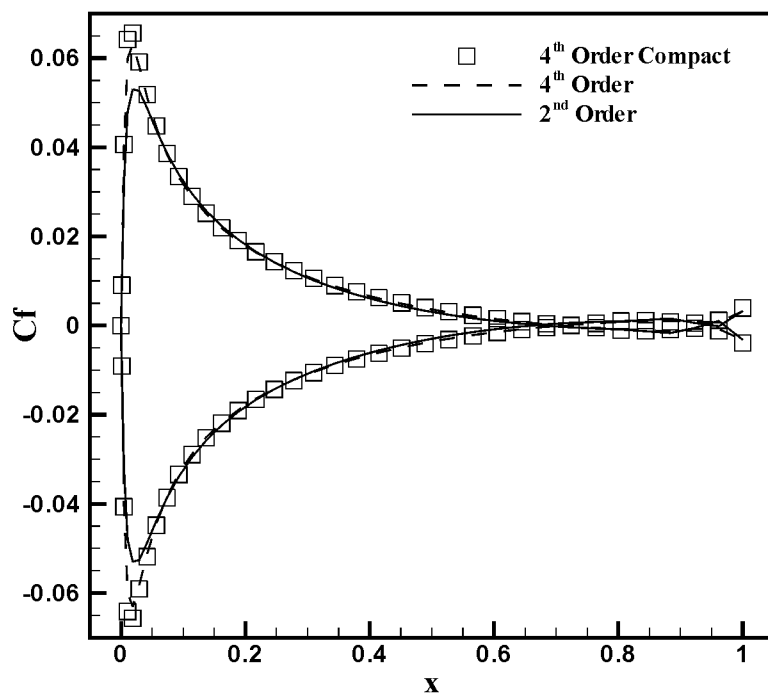
حل‌های مرتبه دوم جهت مقایسه استفاده شده‌است. در سایر شکل‌ها نیز روش فشرده و روش مرتبه چهارم دارای دقت مشابهی می‌باشند.



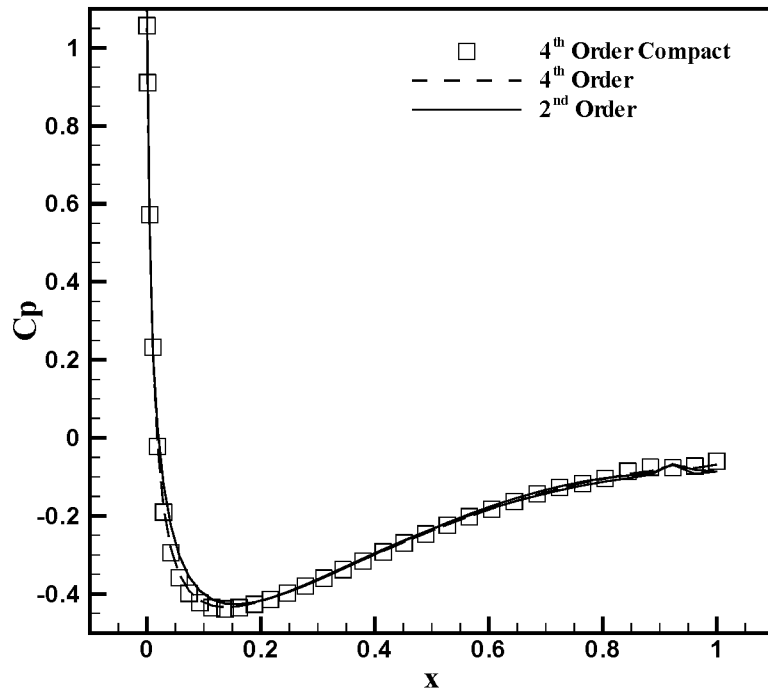




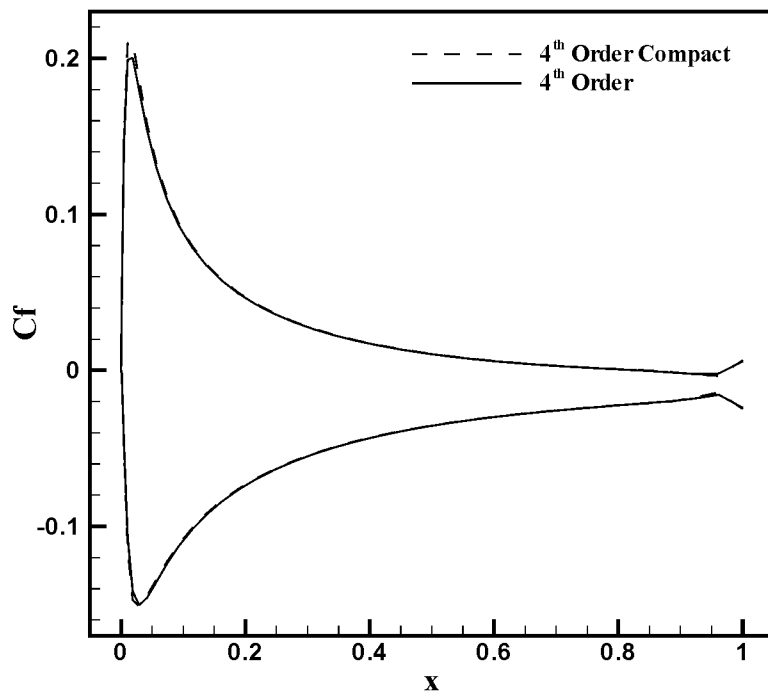
شکل ۶.۵: نمودار ضریب فشار برای $Re = 1000$ در زاویه حمله صفر



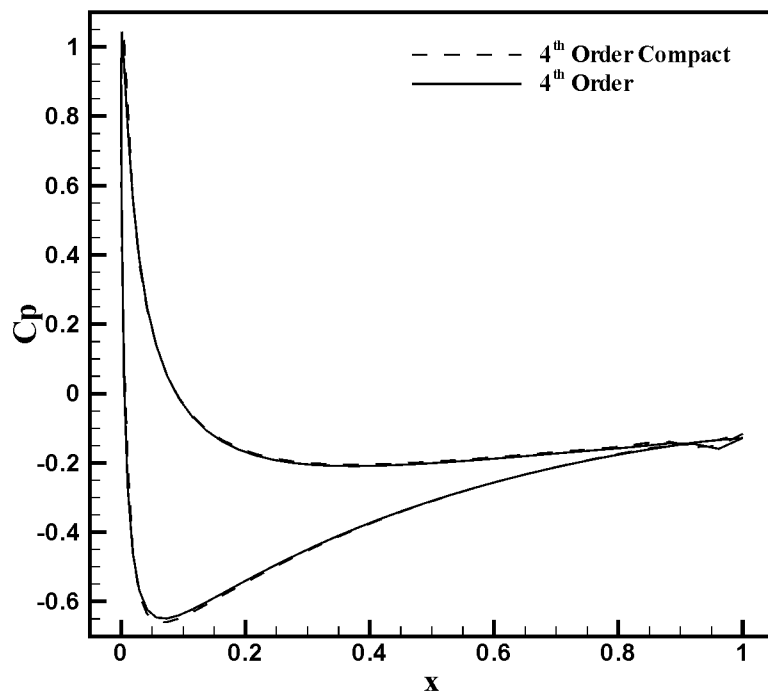
شکل ۶.۶: نمودار ضریب اصطکاک پوسته‌ای برای $Re = 10000$ در زاویه حمله صفر



شکل ۶.۷: نمودار ضریب فشار برای $Re = 10000$ در زاویه حمله صفر



شکل ۶.۸: نمودار ضریب اصطکاک پوسته‌ای برای $Re = 1000$ در زاویه حمله ۴ درجه



شکل ۶.۹: نمودار ضریب فشار برای $Re = 1000$ در زاویه حمله ۴ درجه

مراجع

- Abbott I.H, Doenhoff A. E., “*Theory of Wing Sections*”, Dover Publications, Inc, N.Y., 1959. [١]
- Beam R. M., Warming R. F., “*An Implicit Finite-Difference Algorithm for Hyperbolic Systems in Conservation-Law Form*”, Journal of Computational Physics, Vol. 22, pp. 87-110, 1976. [٢]
- Beam R. M., Warming. R. F., “*An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations*”, AIAA Journal, Vol. 16, No. 4, pp. 393-402, 1978. [٣]
- Beam R. M., Warming. R. F., “*Boundary Approximations for Implicit Schemes for One-Dimensional Inviscid Equations of Gasdynamics*”, AIAA Journal, Vol. 20, No. 9, pp. 1203-1210, 1982. [٤]
- Cain A. B., Bush R. H., “*Numerical Wave Propagation Analysis for Stretched Grids*”, AIAA 94-0172, Jan., 1994. [٥]
- Carpenter M. H., Gottlieb D., Abarbanel S., “*The Stability of Numerical Boundary Treatments for Compact High-Order Finite-Difference Schemes*”, Journal of Computational Physics, Vol. 108, pp. 272-295, 1993. [٦]
- Chaussee D.S., Pulliam T. H., “*A Diagonal Form of an Implicit Approximate Factorization Algorithm With Application to a two Di-* [٧]

mensional Inlet", AIAA Journal, Vol. 24, No. 12, pp. 1931-1940, 1986.

Chung Y.M., Tucker P. G., "*Accuracy of Higher-Order Finite Difference Schemes on Nonuniform Grids*", AIAA Journal, Vol. 41, No. 8, pp. 1609-1611, 2003.

Ekaterinaris J. A., "*Implicit High Resolution, Compact Schemes for Gas Dynamics and Aeracoustics*", Journal of Computational Physics, Vol. 156, pp. 272-299, 1999.

Ekaterinaris J. A., "*Implicit High-Order-Accurate-in-Space Algorithms for the Navier-Stokes Equations*", AIAA Journal, Vol. 38, No. 9, pp. 1594-1602, 2000.

Esfahanian V., Ghader S., Ashrafi kh., "*Accuracy Analysis of Super Compact Scheme in Non-uniform Grid with Application to Parabolized Stability Equations*", International Journal for Numerical Methods in FLuids, Vol. 46, pp. 485-505, 2004

Ekaterinaris J. A., "*Performance of High-Order-Accurate, Low-Diffusion Numerical Schemes for Compressible Flow*", AIAA Journal, Vol. 42, No. 3, pp. 493-500, 2004.

Gamet L., Ducros F., Nicoud F. and Poinso T., "*Compact Finite Difference Schemes on Non-uniform Meshes. Application to Direct Numerical Simulation of Compressible Flows*", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 29, pp. 159-191, 1999.

Hoffmann K. A., Chiang, S. T., "*Computational Fluid Dynamics*", 4th Edition", Engineering Education System, Wichita Kansas, 2000.

- Lele S. K., “*Compact Finite Difference Schemes with Spectral-Like [١٥] Resolution*”, Journal of Computational Physics, Vol. 103, pp. 16-42, 1991.
- Mahajan A. J., Dowell E. H., Bliss D. B., “*Role of Artificial Vis- [١٦] cosity in Euler and Navier-Stokes Solvers*”, AIAA Journal, Vol. 29, No. 4, pp. 555-559, 1991.
- Mahesh K., “*A Family fo High Order Finite Difference Schemes [١٧] with Good Spectral Resolution*”, Journal of Computational Physics, Vol. 145, pp. 332-358, 1998.
- Pulliam T. H., “*Artificial Dissipation Models for the Euler Equa- [١٨] tions* ”, AIAA Journal, Vol. 24, No. 12, pp. 1931-1940, 1986.
- Steger J. L., “*Implicit Finite-Difference Simulation of Flow about [١٩] arbitrary Two-Dimensional Geometries*”, AIAA Journal, Vol. 16, No. 7 , pp. 679-686, 1978.
- Steger J. L., Sorenson R. L. “*Automatic Mesh-Point Clustering Near [٢٠] a Boundary in Grid Generation with Elliptic Partial Differential Equations* ” , Journal of Computational Physics, Vol. 33, pp.405-410, 1979.
- Varma R. R., Caughey D. A., “*Evaluation of Navier-Stokes Solutions [٢١] Using the Integrated Effect of Numerical Dissipation*”, AIAA Journal, Vol. 32, No. 2, pp. 294-299, 1994.
- Visbal M. R., Gaitond D.V., “*High-Order-Accurate Methods for [٢٢] Complex Unsteady Subsonic Flows*”, AIAA Journal, Vol. 37, No. 10, pp. 1231-1239, 1999.

-
- Visbal M. R., Gaitonde. D. V., “*On the Use of Higher-Order Finite- [٢٣]
Difference Schemes on Curvilinear and Deforming Meshes*”, Journal
of Computational Physics, Vol. 181, pp. 155-185, 2002.
- Visbal M. R., Gaitonde. D. V., “*Pade-Type Higher-Order Boundary [٢٤]
Filters for the Navier-Stokes Equations* ”, AIAA Journal, Vol. 38,
No. 11, pp. 2103-2112, 2000.
- Yee H. C., Beam R. M. and Warming R. F., “*Boundary Approxima- [٢٥]
tions for Implicit Schemes for One-Dimensional Inviscid Equations
of Gasdynamics* ”, AIAA Journal , Vol. 20, No.9 1203-1210,1982.
- Zingg D. W., “*Grid Studies for Thin-Layer Navier-Stokes Compu- [٢٦]
tations of Airfoil Flowfields*”, AIAA Journal, Vol. 30, No. 10, pp.
2561-2563, 1992.
- White F. M., “*Viscous Fluid Flow, 2nd Edition*”, McGraw-Hill, [٢٧]
N.Y., 1992.

ضمیمه ب

روش بیم-وارمینگ

معادلات ناویر-استوکس تراکم‌پذیر و دو بعدی در حالت پایستار به صورت زیر می‌باشند:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = \frac{\partial V_1(U, U_x)}{\partial x} + \frac{\partial V_2(U, U_y)}{\partial y} + \frac{\partial w_1(U, U_x)}{\partial y} + \frac{\partial w_2(U, U_y)}{\partial y} \quad (\text{ب.۱})$$

در معادله بالا U متغیر پایستار، F ، G ، V و w بردارهای شار می‌باشند. روش تک مرحله‌ای پیمایش زمانی، به صورت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\Delta U^n = \frac{\theta \Delta t}{1 + \zeta} \frac{\partial \Delta U^n}{\partial t} + \frac{\Delta t}{1 + \zeta} \frac{\partial U^n}{\partial t} + \frac{\zeta}{1 + \zeta} \Delta U^{n-1} + O[(\theta - 1/2 - \zeta) \Delta t^2 + \Delta t^3] \quad (\text{ب.۲})$$

در این معادله $U^n = U(n \Delta t)$ و $\Delta U^n = U^{n+1} - U^n$ می‌باشند. با انتخاب ضرایب ζ و θ در معادله ۲.۱ براساس جدول ۱.۱ می‌توان تعدادی از روش‌های صریح و ضمنی را تولید کرد. همانطور که در رابطه (ب.۲) مشخص است، این روش از مرتبه دو می‌باشد. اگر $\theta = 1/2 + \xi$ باشد روش از مرتبه یک و در غیر این صورت از مرتبه یک می‌باشد. از آنجایی که در این تحقیق از روش مرتبه دو استفاده می‌نمایم فقط به بررسی روش مرتبه دو می‌پردازیم.

اگر به جای مشتق زمانی در معادله (ب.۲) از معادله (ب.۱) جایگزین نماییم، خواهیم داشت:

$$\Delta U^n = \frac{\theta \Delta t}{1 + \zeta} \left[\frac{\partial}{\partial x} (-\Delta F^n + \Delta V_1^n + \Delta V_2^n) \right] + \frac{\theta \Delta t}{1 + \zeta} \left[\frac{\partial}{\partial y} (-\Delta G^n + \Delta W_1^n + \Delta W_2^n) \right]$$

جدول ۱. ب: مقادیر ضرایب فیلتر برای نقاط داخل میدان

خطای قطع	روش	ζ	θ
$O(\Delta t^2)$	اوایلر صریح	۰	۰
$O(\Delta t^3)$	لیپ-فراگ صریح	$-1/2$	۰
$O(\Delta t^3)$	دوزنقه‌ای صریح	۰	$1/2$
$O(\Delta t^2)$	اوایلر ضمنی	۰	۱
$O(\Delta t^3)$	پسروی سه‌نقطه‌ای ضمنی	$1/2$	۱

$$\begin{aligned}
& + \frac{\Delta t}{1+\zeta} \left[\frac{\partial}{\partial x} (-F + V_1 + V_2)^n + \frac{\partial}{\partial y} (-G + W_1 + W_2)^n \right] \\
& + \frac{\zeta}{1+\zeta} \Delta U^{n+1} + O \left[\left(\theta - \frac{1}{2} - \zeta \right) \Delta t^2 + \Delta t^3 \right] \quad (\text{ب.۳})
\end{aligned}$$

در این رابطه $F^{n+1} = F(U^{n+1})$ و $\Delta F = F^{n+1} - F^n$ می‌باشند. فرض می‌شود که بردار $U^n = U(n\Delta t)$ جواب معادله (ب.۱) باشد. همانطور که مشاهده می‌شود، معادله (ب.۳) یک معادله غیرخطی می‌باشد. برای خطی‌سازی به صورت زیر عمل می‌نماییم:

$$F^{n+1} = F^n + \left(\frac{\partial F}{\partial U} \right)^n (U^{n+1} - U^n) + O(\Delta t^2) \quad (\text{ب.۴})$$

یا

$$\Delta F^n = A^n \Delta U^n + O(\Delta t^2) \quad (\text{ب.۵})$$

در این معادله A ژاکوبین ماتریس $\frac{\partial F}{\partial U}$ می‌باشد. به همین ترتیب:

$$\begin{aligned}
\Delta G^n &= \left(\frac{\partial G}{\partial U} \right)^n \Delta U^n + O(\Delta t^2) = B^n \Delta U^n + O(\Delta t^2) \\
\Delta V_1^n &= \left(\frac{\partial V_1}{\partial U} \right)^n \Delta U^n + \left(\frac{\partial V_1}{\partial U_x} \right)^n \Delta U_x^n + O(\Delta t^2) \\
&= P^n \Delta U^n + R^n \Delta U_x^n + O(\Delta t^2) \\
&= (P - R_x)^n \Delta U^n + \frac{\partial (R \Delta U)^n}{\partial x} + O(\Delta t^2) \quad (\text{ب.۶})
\end{aligned}$$

در این معادله P ژاکوبین $\frac{\partial V_1}{\partial U}$ و R ژاکوبین $\frac{\partial V_1}{\partial U_x}$ و $R_x = \frac{\partial R}{\partial x}$ می‌باشد. به طریق مشابه:

$$\Delta W_2^n = (Q - S_y)^n \Delta U^n + \frac{\partial}{\partial y} (S \Delta U)^n + O(\Delta t^2) \quad (\text{ب.۷})$$

مشکل دیگری که وجود دارد مربوط به مشتقات ضربدری مانند $\frac{\partial W_1}{\partial x}$ و $\frac{\partial V_2}{\partial x}$ می‌باشد. اگر بخواهیم تا این جملات را نیز مانند آنچه گفته شد، خطی نماییم مساله بسیار پیچیده می‌گردد. راه دیگر برای مصاحبه این جملات آن است که به صورت صریح و در سمت راست محاسبه گردند. این کار باعث کاهش دقت در محاسبات نمی‌گردد.

$$\Delta V_2^n = \Delta V_2^{n-1} + O(\Delta t^2), \quad \Delta W_1^n = \Delta W_1^{n-1} + O(\Delta t^2) \quad (\text{ب.۸})$$

اگر که تقریبات معادلات (ب.۷) و (ب.۸) را در معادله (ب.۳) جایگزین نماییم، خواهیم داشت:

$$\left\{ I + \frac{\theta \Delta t}{I + \zeta} \left[\frac{\partial}{\partial x} (A - P + R_x)^n - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (R)^n + \frac{\partial}{\partial y} (B - Q + S_y)^n - \frac{\partial^2}{\partial y^2} (S)^n \right] \right\} \\ \Delta U^n = \frac{\Delta t}{1 + \zeta} \left[\frac{\partial}{\partial x} (-F + V_1 + V_2)^n + \frac{\partial}{\partial y} (-G + W_1 + W_2)^n \right]$$

$$\frac{\hat{\theta} \Delta t}{1 + \zeta} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\Delta V_2)^{n-1} + \frac{\partial}{\partial y} (\Delta W_1)^{n-1} \right] \\ \frac{\zeta}{1 + \zeta} \Delta U^{n-1} + O \left[\left(\theta - \frac{1}{2} - \zeta \right) \Delta t^2, (\hat{\theta} - \theta) \Delta t^2, \Delta t^3 \right] \quad (\text{ب.۹})$$

برای دقت مرتبه دوم بایستی $\hat{\theta}$ با θ برابر باشد. شکل فاکتورگیری شده معادله (ب.۹) را می‌توان به آسانی به دست آورد. این معادله به صورت زیر می‌باشد:

$$\left\{ I + \frac{\theta \Delta t}{I + \zeta} \left[\frac{\partial}{\partial x} (A - P + R_x)^n - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (R)^n \right] \right\} \quad (\text{ب.۱۰})$$

$$\times \left\{ I + \frac{\theta \Delta t}{I + \zeta} \left[\frac{\partial}{\partial y} (B - Q + S_y)^n - \frac{\partial^2}{\partial y^2} (S)^n \right] \right\} \Delta U^n \quad (\text{ب.۱۱})$$

$$= LHS + O(\Delta t^3) \quad (\text{ب.۱۲})$$

در این معادله، سمت چپ معادله (ب.۹) می‌باشد. در عمل برای استفاده از این معادله (ب.۱۲) در دو مرحله و به صورت زیر عمل می‌نماییم:

$$\left\{ I + \frac{\theta \Delta t}{1 + \zeta} \left[\frac{\partial}{\partial x} (A - P + R_x)^n - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (R)^n \right] \right\} \Delta U^* = RHS \\ \left\{ I + \frac{\theta \Delta t}{1 + \zeta} \left[\frac{\partial}{\partial y} (B - Q + S_y)^n - \frac{\partial^2}{\partial y^2} (S)^n \right] \right\} = \Delta U^* \\ U^{n+1} = U^n + \Delta U^n \quad (\text{ب.۱۳})$$