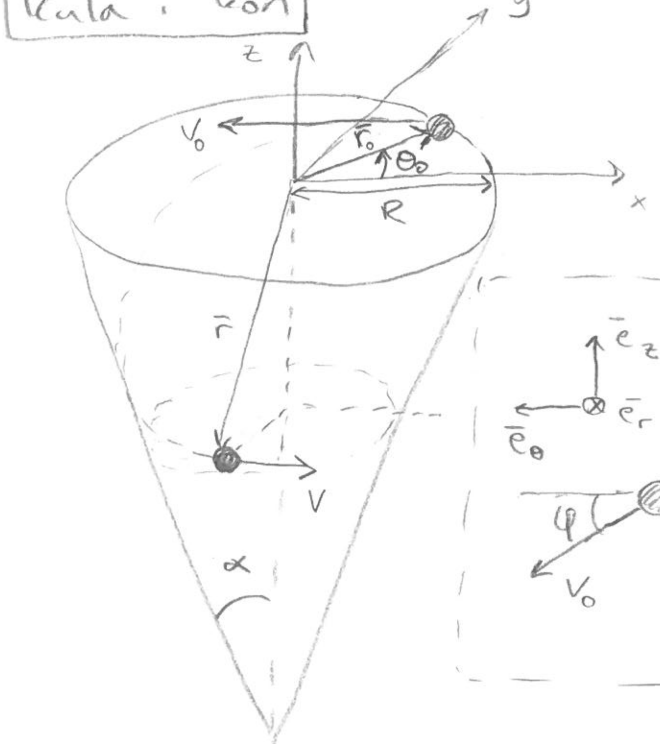
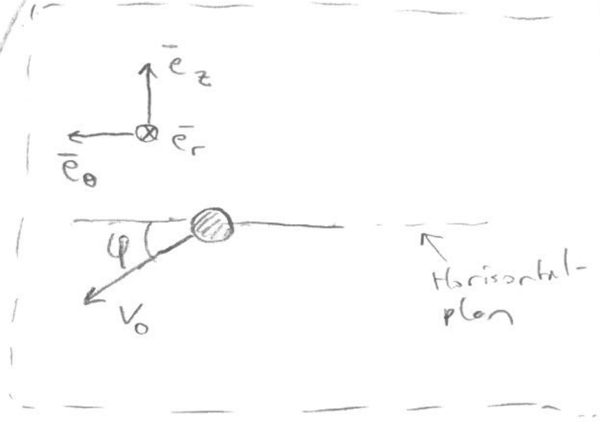
## Kula i kon




**Givet**

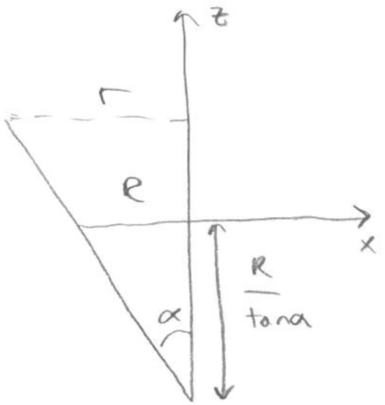
→ $V_0, R, m, g, \alpha, \mu, \varphi$

→ $r_0 = R, \; \theta_0 = z_0 = 0$

**Sökt**

→ Banan $\bar{r}(t)$

Vi börjar med att koppla ihop z- & r-rörelsen




$$\frac{\frac{R}{\tan\alpha} + z}{\frac{R}{\tan\alpha}} = \frac{r}{R}$$

(likformighet gäller)

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} r &= R + z\tan\alpha \\ \dot{r} &= \dot{z}\tan\alpha \\ \ddot{r} &= \ddot{z}\tan\alpha \end{aligned}}$$

(1)

Vi uttrycker initiella hastigheten i cyl. koord.

$$V_0 = \sqrt{\dot{r}_0 + R^2\dot{\theta}_0^2 + \dot{z}_0^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{r}_0 &= \dot{z}_0 \tan\alpha \\ R\dot{\theta}_0 &= V_0\cos\varphi \\ \dot{z}_0 &= -V_0\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{r}_0 &= -V_0\sin\varphi\tan\alpha \\ \dot{\theta}_0 &= \frac{V_0}{R}\cos\varphi \\ \dot{z}_0 &= -V_0\sin\varphi \end{aligned}}$$

(2)

Friktionskraften uttryckt i cylinderkoord.

$$\bar{f} = -\mu N \bar{e}_t$$

Måste uttryckas i cyl.koord.!

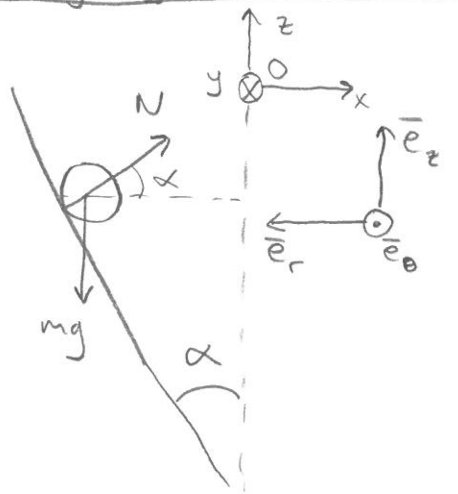
$$\bar{e}_t = \frac{\bar{V}}{V} = [\text{cyl. koord.}] = \frac{(\dot{r}, r\dot{\theta}, \dot{z})}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} f_r &= -\frac{\mu N \dot{r}}{V} \\ f_\theta &= -\frac{\mu N r\dot{\theta}}{V} \\ f_z &= -\frac{\mu N \dot{z}}{V} \end{aligned}}$$

(3)

Kula : kon forts.

Friläggning från sidan (utan friktionskraft utritad)




Kraftekvationen i cylinderkoord.

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{e}_r &: m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -N\cos\alpha + f_r & (4) \\ \bar{e}_\theta &: m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = f_\theta & (5) \\ \bar{e}_z &: m\ddot{z} = N\sin\alpha - mg + f_z & (6) \end{aligned}}$$

Obs! N är också en funktion av rörelsen!

Lös ut ett uttryck för normalkraften givet position och hastighet

(1), (3) & (6) $\Rightarrow$

$$\frac{m\ddot{r}}{\tan\alpha} = N\sin\alpha - mg - \frac{\mu N \dot{z}}{v}$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = g\tan\alpha + \frac{N\tan\alpha}{m}\left(\sin\alpha - \frac{\mu\dot{z}}{v}\right) \quad (7)$$

(3), (4) & (7) $\Rightarrow$

$$m\left(g\tan\alpha + \frac{N\tan\alpha}{m}\left(\sin\alpha - \frac{\mu\dot{z}}{v}\right)\right) - mr\dot{\theta}^2 = -N\cos\alpha - \frac{\mu N\dot{r}}{v}$$

$$N\left(\tan\alpha\sin\alpha - \underbrace{\tan\alpha}_{\dot{z}\tan\alpha = \dot{r}}\cancel{\frac{\mu\dot{z}}{v}} + \cos\alpha + \cancel{\frac{\mu\dot{r}}{v}}\right) = mr\dot{\theta}^2 - mg\tan\alpha$$

$$\boxed{N = \frac{mr\dot{\theta}^2 - mg\tan\alpha}{\tan\alpha\sin\alpha + \cos\alpha}} \quad (8)$$

N är funktion av $r$ & $\dot{\theta}$ (för givet $\alpha$)!

Vi har nu följande rörelseekvationer

forts.

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{r} &= -\frac{N}{m}\left(\cos\alpha + \frac{\mu \dot{r}}{v}\right) + r\dot{\theta}^2 \\ \ddot{\theta} &= -\frac{\mu N \dot{\theta}}{mv} - \frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} \end{aligned}} \quad (9) \qquad \left(\text{där } N = \frac{mr\dot{\theta}^2 - mg\tan\alpha}{\tan\alpha\sin\alpha + \cos\alpha}\right)$$

med begynnelsevillkor

$$\boxed{\begin{aligned} r_0 &= R, & \dot{r}_0 &= -V_0 \sin\varphi \tan\alpha \\ \theta_0 &= 0, & \dot{\theta}_0 &= \frac{V_0}{R}\cos\varphi \end{aligned}}$$

(z-rörelsen fås automatiskt ur r-rörelsen enligt (1))

$\Rightarrow$ Använd lämplig tidsintegrering för att få rörelsen, t.ex. Runge-Kutta 4

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{r} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} r \\ \theta \\ \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}\right)$$

Obs: Om systemet är konservativt, $\mu = 0$

$$\frac{mv^2}{2} + mgz = \frac{mv_0^2}{2} = E \quad (10) \quad (\text{energi bevaras})$$

$$mr^2\dot{\theta} = mR^2\dot{\theta}_0 = H_z \quad (11) \quad (\text{rörelsemängdsmoment bevaras})$$

(11) $\Rightarrow$

$$\dot{\theta} = \frac{R^2}{r^2}\dot{\theta}_0 \quad (12)$$

(10) & (12) $\Rightarrow$

$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2 \cdot \left(\frac{R^2}{r^2}\dot{\theta}_0\right)^2 + \left(\frac{\dot{r}}{\tan\alpha}\right)^2 = V_0^2 - 2gz$$

$$\Rightarrow \dot{r}^2\left(1 + \frac{1}{\tan^2\alpha}\right) = V_0^2 - 2gz - \frac{R^4\dot{\theta}_0^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \dot{r} = \sqrt{\frac{V_0^2 - 2gz - \frac{R^4\dot{\theta}_0^2}{r^2}}{\tan^2\alpha + 1}}\tan\alpha \quad (13)$$

Både $\dot{r}$ & $\dot{\theta}$ är givna från positionen och därför är det ej nödvändigt att använda $\ddot{r}$ & $\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix}\right)$$