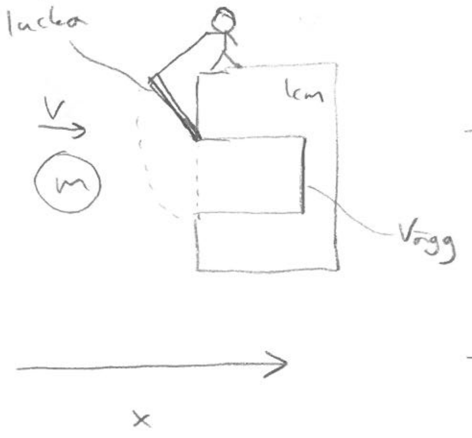
Uppgift 11.7 | Möjlig extension 2



Givet

→ Vi har en gubbe som stänger in kulan med en lucka just när kulan passerat

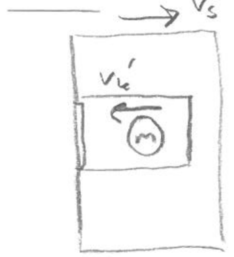
→ Bara elastiska stötar med vägg och lucka! (e = 1)

Sökt

→ Har systemet kula-säck en annan möjlig sluthastighet v_A?

Första kollisionen (kula-vägg)

Efter



Rörelsemängd bevaras i x-led

$$mv = mv_k' + kmv_s'$$

$$v_k' = v - kv_s' \quad (1)$$

Studstal e = 1

$$\cancel{v_s}^{0} - \underbrace{v_k}_{=v} = v_k' - v_s' \Rightarrow v_s' = v_k' + v \quad (2)$$

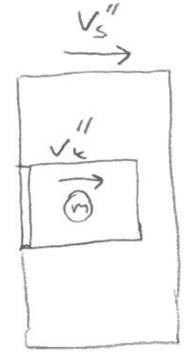
$$(1) \,\&\, (2) \Rightarrow v_k' = v - k(v_k' + v) \Rightarrow v_k' = \frac{1-k}{1+k}v \quad (3)$$

$$(2) \,\&\, (3) \Rightarrow$$

$$v_s' = \frac{1-k}{1+k}v + \frac{(1+k)v}{1+k} = \frac{2v}{1+k} \quad (4)$$

Andra kollisionen (kula-lucka)

Efter



Rörelsemängd bevaras

$$mv_k' + kmv_s' = mv_k'' + kmv_s''$$

$$\frac{1-k}{1+k}v + k\cdot\frac{2v}{1+k} = v_k'' + kv_s''$$

$$v = v_k'' + kv_s'' \quad (5)$$

Studstal e = 1

$$v_s' - v_k' = v_k'' - v_s'' \Rightarrow \frac{2v}{1+k} - \frac{1-k}{1+k}v = v_k'' - v_s''$$

$$\Rightarrow \frac{2v - v + kv}{1+k}v = v_k'' - v_s'' \Rightarrow v = v_k'' - v_s''$$

$$\Rightarrow v_s'' = v_k'' - v \quad (6)$$

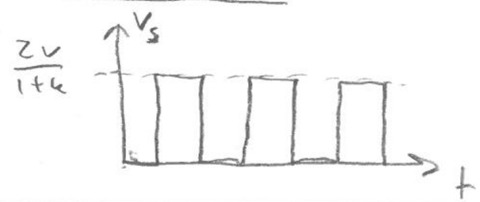
$$(5) \,\&\, (6) \Rightarrow$$

$$v = v_k'' + k(v_k'' - v)$$

$$\cancel{(1+k)}\, v = \cancel{(1+k)}\, v_k'' \Rightarrow \boxed{v_k'' = v} \quad (6) \Rightarrow \boxed{v_s'' = 0}$$

Vi är tillbaka i ursprungsläget!

Säckens hastighet



→

Uppgift 11.7 Möjlig extension 2 forts

En observatör ser alltså att säcken har en hackig rörelse där säcken antingen har hastigheten <u>noll</u> eller hastigheten $\frac{2v}{1+k}$.

Säcken spenderar lika mycket tid i båda tillstånden eftersom relativa hastigheten mellan kula-säck är alltid samma när $e = 1$.

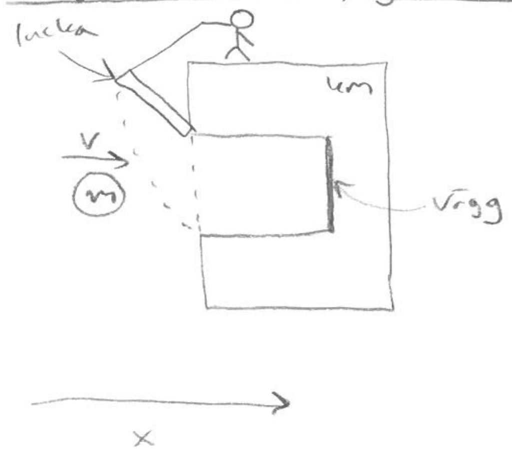
Detta innebär att medelhastigheten för kula-säck-systemet blir medelvärdet av de två tillstånden

$$V_A = \frac{0 + \frac{2v}{1+k}}{2} = \frac{v}{1+k}$$

Det intressanta är att observatören kommer uppfatta det som ett möjligt regelbrott mot energiprincipen då det inte sker några värmeförluster.

Anledningen är förstås att kulan hela tiden ser till att behålla den kinetiska energin genom sin rörelse fram-och-tillbaka inuti säcken!

Uppgift 11.4 Fröjlig extension



Givet

→ Samma gubbe igen som stänger in kulan

→ Vi har studstal e vid stötar med vägg och lucka

Sökt

→ Vad är systemets sluthastighet v_A?

Första kollisionen (kula - vägg)

$\boxed{p_x = \text{konstant}}$

$$mv = mv_k' + kmv_s' \Rightarrow v_k = v - kv_s' \quad (1)$$

$\boxed{\text{studstal}}$

$$e(\underbrace{v_s - v_k}_{=v}) = v_k' - v_s' \Rightarrow v_s' = v_k' + ev \quad (2)$$

$$(1) \,\&\, (2) \Rightarrow v_k' = v - k(v_k' + ev) \Rightarrow v_k' = \frac{1-ke}{(1+k)} v \quad (3)$$

$$(2) \,\&\, (3) \Rightarrow v_s' = \frac{v - kev + ev + kev}{1+k} = \frac{1+e}{1+k} v \quad (4)$$

Andra kollisionen (kula - lucka)

$\boxed{p_x = \text{konstant}}$

$$\underbrace{mv_k' + kmv_s'}_{=mv} = mv_k'' + kmv_s'' \Rightarrow v = v_k'' + kv_s'' \quad (5)$$

Studstal

$$e(v_s' - v_k') = v_k'' - v_s''$$

$$e\left[\frac{\cancel{1}+e-\cancel{1}+ke}{1+k} v\right] = v_k'' - v_s''$$

$$e^2\left[\frac{1+k}{1+k} v\right] = v_k'' - v_s'' \Rightarrow v_s'' = v_k'' - e^2 v \quad (6)$$

$(5) \,\&\, (6) \Rightarrow$

$$v_k'' = v - k\left[v_k'' - e^2 v\right] \Rightarrow v_k'' = \frac{1+ke^2}{1+k} v \quad (7)$$

$(6) \,\&\, (7) \Rightarrow$

$$v_s'' = \frac{v + ke^2v - (1+k)e^2 v}{1+k} = \frac{1-e^2}{1+k} v \quad (8)$$

Tredje kollisionen (kula - vägg)

$\boxed{p_x = \text{konstant}}$ $\Rightarrow mv = mv_k''' + kmv_s''' \Rightarrow v_k''' = v - kv_s''' \quad (9)$

$\boxed{\text{studstal}}$

$$e(v_s'' - v_k'') = v_k''' - v_s'''$$

$$e\left[\frac{\cancel{1} - e^2 - \cancel{1} - ke^2}{1+k} v\right] = v_k''' - v_s''' \Rightarrow v_s''' = v_k''' + e^3 v \quad (10)$$

$(9) \,\&\, (10) \Rightarrow$

$$v_k''' = v - k\left[v_k''' + e^3 v\right] \Rightarrow v_k''' = \frac{1-ke^3}{1+k} v \quad (11)$$

$(10) \,\&\, (11) \Rightarrow$

$$v_s''' = \frac{v - ke^3v + e^3v + ke^3v}{1+k} \Rightarrow v_s''' = \frac{1+e^3}{1+k} v \quad (12)$$

Uppgift 11.7 | Möjlig extension 5 forts.

Fjärde kollisionen (kula - lucka)

$\boxed{p_x = \text{konstant}} \Rightarrow mv = mv_k'''' + kmv_s'''' \Rightarrow v_k'''' = v - kv_s''''$ (13)

Studstal

$e\left(v_s''' - v_k'''\right) = v_k'''' - v_s''''$

$e\left[\frac{\cancel{1} + e^3 - \cancel{1} + ke^3}{1+k} v\right] = v_k'''' - v_s'''' \Rightarrow v_s'''' = v_k'''' - e^4 v$ (14)

(13) & (14) $\Rightarrow$

$v_k'''' = v - k\left[v_k'''' - e^4 v\right] \Rightarrow v_k'''' = \frac{1+ke^4}{1+k} v$ (15)

(14) & (15) $\Rightarrow$

$v_s'''' = \frac{v + \cancel{ke^4 v} - e^4 v - \cancel{ke^4 v}}{1+k} = \frac{1-e^4}{1+k} v$ (16)

Vi börjar se ett mönster!

Kulans hastighet

$v \longrightarrow \frac{1-ke}{1+k} v \longrightarrow \frac{1+ke^2}{1+k} v \longrightarrow \frac{1-ke^3}{1+k} v \longrightarrow \frac{1+ke^4}{1+k} v$

Eftersom $e < 1$ så går $e^n \to 0$ då $n \to \infty$

$\Rightarrow v_{kula} \longrightarrow \frac{v}{1+k}$

Samma sak med säckens hastighet

$0 \longrightarrow \frac{1+e}{1+k} v \longrightarrow \frac{1-e^2}{1+k} v \longrightarrow \frac{1+e^3}{1+k} v \longrightarrow \frac{1-e^4}{1+k} v$

$\Rightarrow v_{säck} \longrightarrow \frac{v}{1+k}$

Säcken och kulan får till slut samma hastighet $v_A = v_{kula} = v_{säck} = \frac{v}{1+k}$

Varje liten energiförlust i varje enskild stöt summeras ihop tills vi till slut får den kinetiska energiförlusten som motsvarar att kula och säck har samma hastighet (se (4): "möjlig extension 1")

Säckens hastighet