MEKANIK, eller kursen om $F = m\bar{a}$

Tomas Rosén
rosen@mech.kth.se
www.mech.kth.se/~rosen/

Mekanik är läran om att förutspå rörelser och verkan av krafter.

→ Matematiska modeller av verkligheten

→ Mycket linjär algebra, $\bar{M}_O = \bar{r} \times \bar{F}$, $F_x = \bar{F} \cdot \bar{e}_x$ ...

→ En viktig skillnad, våra vektorer betyder någonting!

→ $\bar{r}$ = position (m)

→ $\bar{F}$ = kraft (N) ....

→ $\bar{M}_O$ = moment (Nm) ...

Villket leder oss till dagens första ämne.. kap 2

Dimensionsanalys

Mekaniska storheter kan beskrivas utifrån tre grundstorheter:

M, massa (kg)

L, längd (m)

T, tid (s)

Ex:

$\boxed{F = ma}$

$$a = \text{acceleration} = \frac{\text{hastighet}}{\text{tid}} = \frac{\left(\frac{\text{längd}}{\text{tid}}\right)}{\text{tid}}$$

$$[a] = LT^{-2}$$

$$\Rightarrow [F] = M \cdot LT^{-2}$$

kraft mäts i $kg\,m/s^2 = N$

Obs!

→ $[\text{vinkel}] = 1$

→ $[\text{antal}] = 1$

→ kontrollera alltid ditt svar

→ Dimension (söks en sträcka → svara i meter!)

Ex: $L = 2a + 3b$

L, a & b måste ha samma dimension!

~~Äpple + Penna = Äppelpenna~~

→ Rimlighet (600 MW är för hög effekt för en bil t.ex. bil → ≈100kW)

Uppgift 1.1

Givet: OBS! Alla kvantiteter är dimensionslösa

$\bar{a} = (2, -1, -2)$

$\bar{b} = (0, -3, 4)$

$\bar{c} = (1, -1, 2)$

Sökt:
a) $\bar{e}_a$ & $\bar{e}_b$
b) Vinkeln θ mellan $\bar{a}$ & $\bar{b}$
c) $\bar{a}_{//}$ & $\bar{a}_\perp$ (i förh. till $\bar{b}$)
d) $\bar{d}$, som är $\bar{a}$:s komposant i xy-planet
e) $\bar{a} \times \bar{b}$
f) $V = |\bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c}|$
g) $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$

Enhetsvektorerna

$$\bar{e}_a = \frac{\bar{a}}{a} = \frac{(2, -1, -2)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{(2, -1, -2)}{\sqrt{9}} = \underline{\underline{\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)}}$$

Svar a)

$$\bar{e}_b = \frac{\bar{b}}{b} = \frac{(0, -3, 4)}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{(0, -3, 4)}{\sqrt{25}} = \underline{\underline{\left(0, -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)}}$$

Vinkeln θ

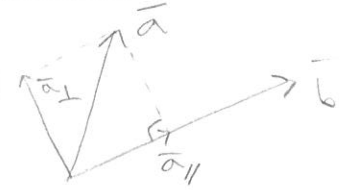
$$\cos\theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{ab} = \frac{\bar{e}_a \cdot \bar{e}_b}{\underbrace{e_a}_{=1} \underbrace{e_b}_{=1}} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \cdot \left(0, -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) =$$

$$= 0 + \frac{3}{15} - \frac{8}{15} = -\frac{5}{15} = -\frac{1}{3}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) \approx \underline{\underline{109.5^\circ}}$$

svar b)

Komposanterna $a_{//}$ & $a_\perp$



$$\bar{a}_{//} = (\bar{a} \cdot \bar{e}_b)\bar{e}_b = \left((2, -1, -2) \cdot \left(0, -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)\right)\bar{e}_b =$$

$$= \left(\frac{3}{5} - \frac{8}{5}\right)\bar{e}_b = -\bar{e}_b = \underline{\underline{\left(0, \frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)}}$$

svar c)

$$\bar{a}_\perp = \bar{a} - \bar{a}_{//} = (2, -1, -2) - \left(0, \frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) =$$

$$= \left(2 - 0, -\frac{5}{5} - \frac{3}{5}, -\frac{10}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right)\right) = \underline{\underline{\left(2, -\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right)}}$$

Vektorn $\bar{d}$, $\bar{a}$:s komposant i xy-planet

$$\bar{a} = \bar{a}_x + \bar{a}_y + \bar{a}_z = \underbrace{(2, 0, 0) + (0, -1, 0)}_{= \bar{d}} + \underbrace{(0, 0, -2)}_{= \bar{a}_z}$$

$$\bar{d} = \bar{a} - \bar{a}_z = (2, -1, -2) - (0, 0, -2) = \underline{\underline{(2, -1, 0)}}$$

svar d)

Produkten $\bar{a} \times \bar{b}$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (-4-6)\bar{e}_x - (8-0)\bar{e}_y + (-6-0)\bar{e}_z =$$

$$= -10\bar{e}_x - 8\bar{e}_y - 6\bar{e}_z = \underline{\underline{(-10, -8, -6)}}$$

svar e)

Uppgift 1.11 forts.

Volymen V

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = \bar{a}\cdot\begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \bar{a}\cdot(-2, 4, 3) =$$

$$= (2, -1, -2)\cdot(-2, 4, 3) = -4-4-6 = -14$$

$V = |\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})| = \underline{\underline{14}}$ svar f)

Trippelprodukten $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = \bar{b}(\bar{a}\cdot\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}\cdot\bar{b}) \quad (1)$$

$$\bar{a}\cdot\bar{c} = (2, -1, -2)\cdot(1, -1, 2) = 2+1-4 = -1$$

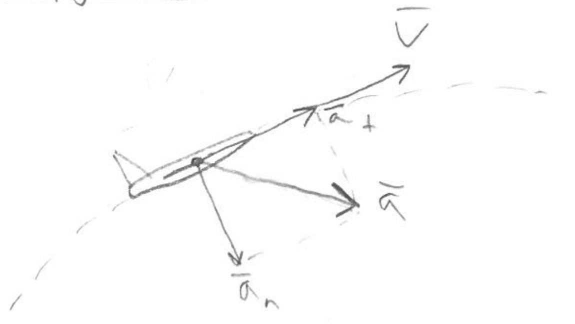
$$\bar{a}\cdot\bar{b} = (2, -1, -2)\cdot(0, -3, 4) = 0+3-8 = -5$$

(1) $\Rightarrow$

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = (0, -3, 4)\cdot(-1) - (1, -1, 2)\cdot(-5) =$$

$$= (0, 3, -4) + (5, -5, 10) = \underline{\underline{(5, -2, 6)}}$$

Uppgift 1.5



Givet

- $\bar{v} = 10(4,12,3)\,m/s$
- $\bar{a} = (10,-2,-1)\,m/s^2$

Sökt

- $\bar{a}_t$ & $\bar{a}_n$

$\bar{a}_t$ fås genom projicering

$$\bar{a}_t = (\bar{a} \cdot \bar{e}_t)\bar{e}_t \qquad (1)$$

$\bar{a}_n$ fås genom subtraktion

$$\bar{a}_n = \bar{a} - \bar{a}_t \qquad (2)$$

Obs! Hastigheten är alltid i tangentiell riktning!

$$\bar{v} = v\bar{e}_t$$

$$\Rightarrow \bar{e}_t = \frac{\bar{v}}{v} = \frac{10(4,12,3)}{10\sqrt{16+144+9}} = \frac{(4,12,3)}{\sqrt{169}} = \frac{(4,12,3)}{13} \qquad (3)$$

(1) & (3) $\Rightarrow$

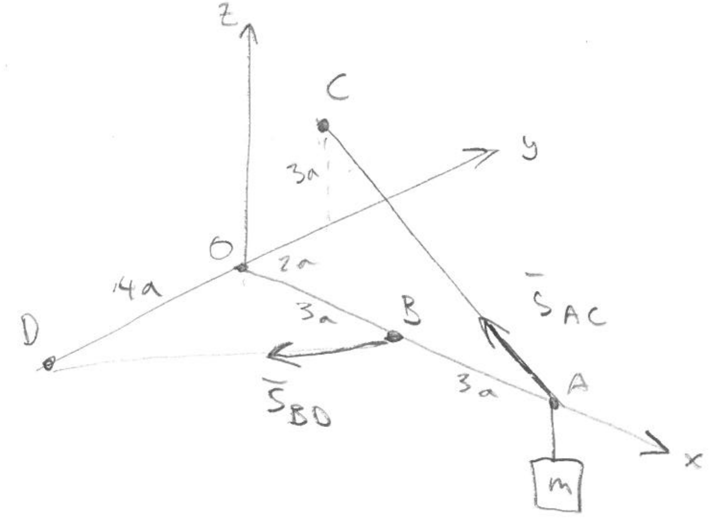
$$\bar{a}_t = \left((10,-2,-1) \cdot \frac{(4,12,3)}{13}\right)\bar{e}_t\,m/s^2 =$$

$$= \left(\frac{40-24-3}{13}\right)\bar{e}_t\,m/s^2 = \bar{e}_t\,m/s^2 = \frac{(4,12,3)}{13}\,m/s^2$$

$$\bar{a}_n = \bar{a} - \bar{a}_t = \frac{13(10,-2,-1)}{13}\,m/s^2 - \frac{(4,12,3)}{13}\,m/s^2 =$$

$$= \frac{(126,-38,-16)}{13}\,m/s^2$$

Uppgift 1.7



Givet

- Avstånd enligt figur
- $S_{AC} = 7\,kN = 7000\,N$
- $S_{BD} = 5\,kN = 5000\,N$

Sökt

- Vinkeln α mellan $\bar{S}_{AC}$ & $\bar{S}_{BD}$
- $(S_{AC})_{AO}$ & $(S_{BD})_{AO}$

Vinkeln fås genom

$$\cos\alpha = \frac{\bar{e}_{AC}\cdot\bar{e}_{BD}}{\underbrace{e_{AC}}_{=1}\cdot\underbrace{e_{BD}}_{=1}} = \bar{e}_{AC}\cdot\bar{e}_{BD} \quad (1)$$

$$\bar{e}_{AC} = \frac{\bar{r}_{AC}}{r_{AC}} = \frac{\bar{r}_C-\bar{r}_A}{|\bar{r}_C-\bar{r}_A|} = \frac{(0,2,3)a-(6,0,0)a}{|\bar{r}_C-\bar{r}_A|} = \frac{(-6,2,3)a}{\sqrt{36+4+9}\,a} = \frac{(-6,2,3)}{7} \quad (2)$$

$$\bar{e}_{BD} = \frac{\bar{r}_{BD}}{r_{BD}} = \frac{\bar{r}_D-\bar{r}_B}{|\bar{r}_D-\bar{r}_B|} = \frac{(0,-4,0)a-(3,0,0)a}{|\bar{r}_D-\bar{r}_B|} = \frac{(-3,-4,0)a}{\sqrt{9+16}\,a} = \frac{(-3,-4,0)}{5} \quad (3)$$

(1), (2) & (3) $\Rightarrow$

$$\cos\alpha = \left(-\frac{6}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5},0\right) = \frac{18}{35}-\frac{8}{35} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$$

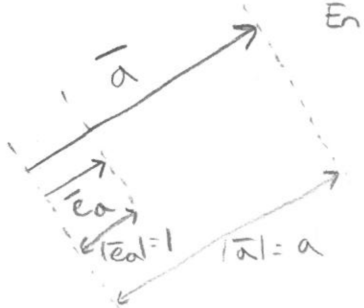
$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) \approx \underline{\underline{73.4^\circ}}$$

Projiceringarna

$$(S_{AC})_{AO} = \bar{S}_{AC}\cdot\bar{e}_{AO} = \left[\begin{matrix}\bar{e}_{AO} = -\bar{e}_x\\ \bar{S}_{AC} = S_{AC}\bar{e}_{AC}\end{matrix}\right] = S_{AC}\frac{(-6,2,3)}{7}\cdot(-1,0,0) = S_{AC}\cdot\frac{6}{7} = [S_{AC} = 7\,kN] = \underline{\underline{6\,kN}}$$

$$(S_{BD})_{AO} = \bar{S}_{BD}\cdot\bar{e}_{AO} = S_{BD}\bar{e}_{BD}\cdot\bar{e}_{AO} = S_{AC}\frac{(-3,-4,0)}{5}\cdot(-1,0,0) = S_{BD}\cdot\frac{3}{5} = [S_{BD} = 5\,kN] = \underline{\underline{3\,kN}}$$

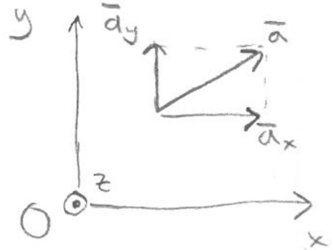
Vektoralgebra (3-dimensioner!)



En vektor har storlek och riktning

$$\bar{a} = a\,\bar{e}_a$$

Vi kan uttrycka med koordinatriktningar



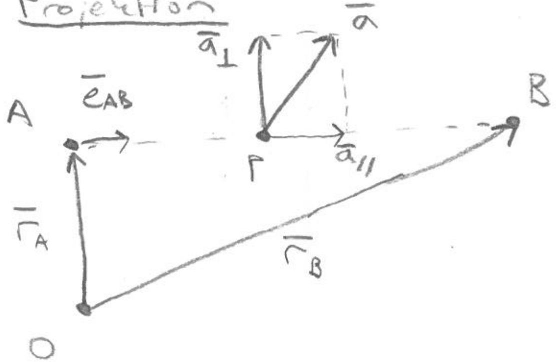
$$\bar{a} = \bar{a}_x + \bar{a}_y + \bar{a}_z = a_x\bar{e}_x + a_y\bar{e}_y + a_z\bar{e}_z = (a_x, a_y, a_z)$$

$\bar{a}_x, \bar{a}_y, \bar{a}_z$ **komposanter** (vektorer)

a_x, a_y, a_z **komponenter** (skalärer)

(Finns inte koordsyst. givet → Rita in ett själv med lämplig riktn.)

Projektion



Obs!

En punkt P med koordinater $(1,2,3)$ m har ortsvektor $\bar{r}_P = (1,2,3)$ m

$(\bar{r}_{OP} = \bar{r}_P)$

$$\bar{e}_{AB} = \frac{\bar{r}_B - \bar{r}_A}{|\bar{r}_B - \bar{r}_A|}$$

$$\bar{a}_{//} = \underbrace{\overbrace{(\bar{a}\cdot\bar{e}_{AB})}^{\text{komponent}}\,\bar{e}_{AB}}_{\text{komposant}} \qquad \bar{a}_\perp = \bar{a} - \bar{a}_{//}$$

Skalärprodukt

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a\,b\cos\alpha$$

vinkel mellan $\bar{a}$ & $\bar{b}$

Vektorprodukt (kryssprodukt)

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

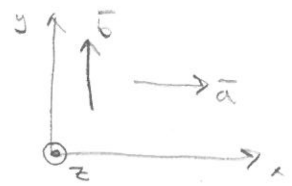
- $|\bar{a}\times\bar{b}| = a\,b\sin\alpha$
- $\bar{a}\times\bar{b}$ är vinkelrät mot $\bar{a}$ & $\bar{b}$

  (ligger $\bar{a}$ & $\bar{b}$ i xy-planet, måste $\bar{a}\times\bar{b}$ peka i $\pm\bar{e}_z$-riktning)
- $\bar{a}, \bar{b}$ & $\bar{a}\times\bar{b}$ bildar ett högersystem
- $\bar{e}_x \times \bar{e}_y = \bar{e}_z$

Exempel (vinkelräta vektorer)

$\bar{a} = a\bar{e}_x$

$\bar{b} = b\bar{e}_y$



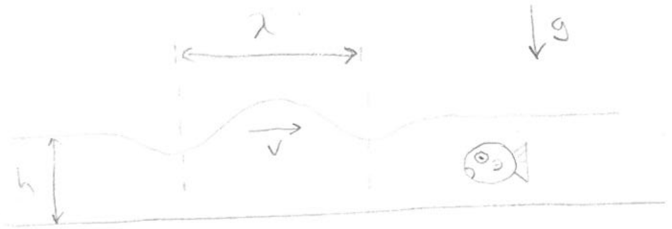
storlek $|\bar{a}\times\bar{b}| = a\cdot b$ $\quad (\alpha = 90°)$

riktning $\bar{e}_x \times \bar{e}_y = \bar{e}_z$

$$\Rightarrow \bar{a}\times\bar{b} = ab\,\bar{e}_z$$

Uppgift 2.2

Grundvattenvågor ($h \ll \lambda$)



Sökt: Uttryck för v

Givet: Beroende av g & h

Storheter

$[v] = LT^{-1}$ $[h] = L$ $[g] = LT^{-2}$

Ansats

(dim. lös)

$v = C \cdot h^x g^y$

Stoppa in storheter

$LT^{-1} = 1 \cdot L^x (LT^{-2})^y$

$LT^{-1} = L^{x+y} T^{-2y}$

Ekvationssystem

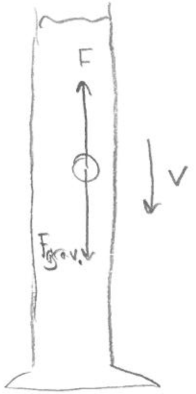
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -2y = -1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \;\&\; x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow v = C h^{1/2} g^{1/2} = C\sqrt{hg}$$

Givet att man vet $C = 1$, vad blir $v_{tsunami}$ om $g = 9.82\ m/s^2$ och $h = 4000\ m$?

$$v = \sqrt{gh} = \sqrt{9.82 \cdot 4000}\ m/s \approx 198\ m/s \approx 713\ km/h$$

Uppgift 2.4



Sökt: • Uttryck för F

Givet: • Beroende av r, v, μ

• $[\mu] = [F/(Av/\ell)]$

$[A] = L^2$, $[\ell] = L$

Storheter

$[F] = \begin{pmatrix}\text{kom ihåg} \\ F = ma\end{pmatrix} = MLT^{-2}$, $[r] = L$, $[v] = LT^{-1}$

$[\mu] = [F/(Av/\ell)] = MLT^{-2}/(L^2 LT^{-1}/L) =$

$= MLT^{-2}L^{-2}T = ML^{-1}T^{-1}$

Ansats

$F = \underset{}{\overset{\text{dim.lös}}{C}} \cdot r^x v^y \mu^z$

Dimensionsanalys

$MLT^{-2} = 1 \cdot L^x (LT^{-1})^y (ML^{-1}T^{-1})^z = M^z L^{x+y-z} T^{-y-z}$

Ger följande ekvationssystem

$$\begin{cases} 1 = z & (1) \\ 1 = x + y - z & (2) \\ -2 = -y - z & (3) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow \boxed{z = 1}$ (4)

(4) & (3) $\Rightarrow -2 = -y - 1 \Rightarrow \boxed{y = 1}$ (5)

(4), (5) & (2) $\Rightarrow$

$1 = x + 1 - 1 \Rightarrow \boxed{x = 1}$ (6)

Stoppa in (4), (5) & (6) i ansatsen

$\boxed{F = Crv\mu}$ Svar (i verkligheten är $C = 6\pi$)

(Om kraftbalans råder, $F = F_{grav.} = (\rho_{partikel} - \rho_{vätska})Vg$

$\Rightarrow (\rho_{partikel} - \rho_{vätska})Vg = Crv\mu$ $V = \frac{4\pi r^3}{3}$)

Obs!

Vi kan inte få ett exakt värde utan att med andra metoder räkna ut C. Men vi kan t.ex. säga att kraften fördubblas om hastigheten fördubblas etc. och med att för hållandet är linjärt!

(Så om det hade stått v^2 istället för v så hade vi kunnat säga att kraften fyrdubblas om hastigheten fördubblas)