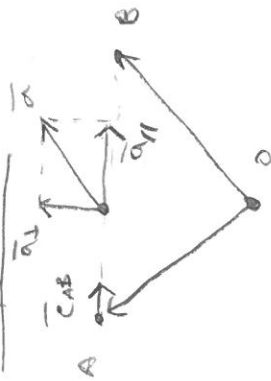


Komponenten

Projektion



$$\overline{a}_{||} = \underbrace{(\overline{a} \cdot \overline{e}_{AB})}_{\text{Komponent}} \overline{e}_{AB}$$

$$\overline{a}_{\perp} = \overline{a} - \overline{a}_{||}$$

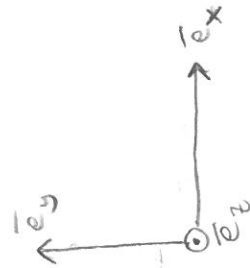
$$\overline{e}_{AB} = \frac{\overline{r}_B - \overline{r}_A}{|\overline{r}_B - \overline{r}_A|}$$

Kreuzprodukt

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{e}_x & \overline{e}_y & \overline{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - b_y a_z, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

Koordinaten eines Einheitsvektors

$$\overline{e}_x \times \overline{e}_y = \overline{e}_z \quad \text{Händeregel (vinkelrechte Vektoren)}$$

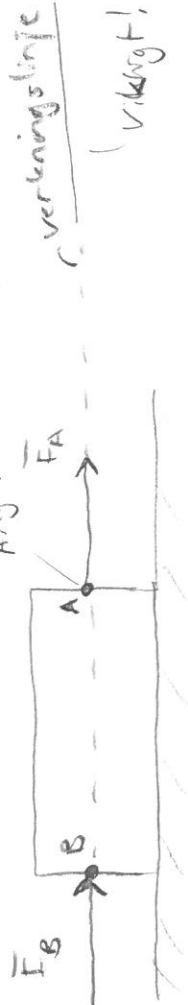


- Thumb: $\overline{a} \times \overline{b}$ - Richtung
- Ringfinger: $\overline{b}$ - Richtung
- Mittelfinger: $\overline{a}$ - Richtung
- $|\overline{a} \times \overline{b}| = ab \sin \alpha$

Vad blir $\overline{e}_z \times \overline{e}_y$?

Kraftsystem

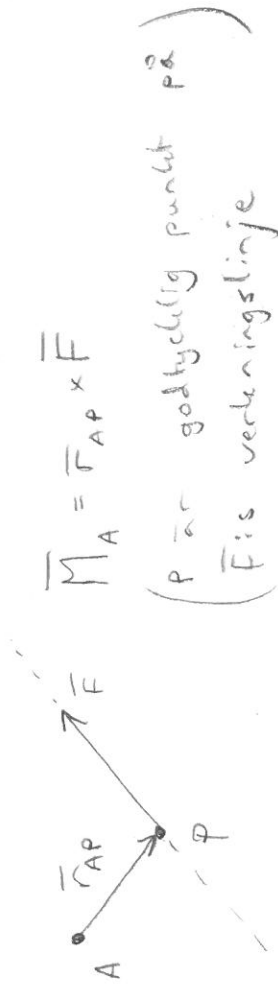
Kraft = mekanisk verkan från en kropp på en annan



$\vec{F}_B$ & $\vec{F}_A$ ger samma verkan om de är lika stora! (För att de har samma verkningslinje)

(Om vi inte gillar en krafts angreppspunkt, flytta kraften (då till en annan punkt längs verkningslinjen)

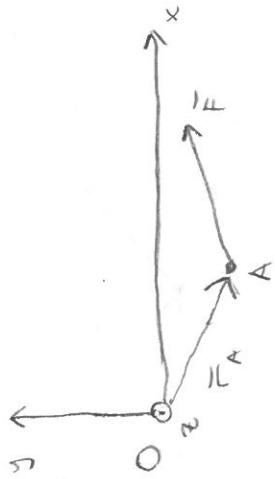
Kraftmoment: En krafts vridande förmåga på alla punkter som inte ligger på verkningslinjen!



$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AP} \times \vec{F}$$

(P är godtycklig punkt på $\vec{F}$'s verkningslinje)

Lips för att beräkna moment



① Determinanten (3D)

$$\vec{M}_0 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ r_{Ax} & r_{Ay} & r_{Az} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \dots$$

② Med koordinat-erhetsvektorer (2D eller 3D)

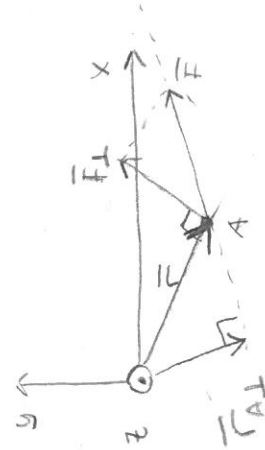
$$\begin{aligned} \vec{M}_0 &= (r_{Ax}\vec{e}_x + r_{Ay}\vec{e}_y) \times (F_{Ax}\vec{e}_x + F_{Ay}\vec{e}_y) = \begin{bmatrix} \vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{0} \\ \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{0} \end{bmatrix} = \\ &= r_{Ax}F_{Ay}\underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_y}_{=\vec{e}_z} + r_{Ay}F_{Ax}\underbrace{\vec{e}_y \times \vec{e}_x}_{=-\vec{e}_z} \end{aligned}$$

③ Hitta vinkelräta komponenter (2D)

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_{A\perp} \times \vec{F} = \vec{r}_A \times \vec{F}_\perp =$$

$$= r_{A\perp} F_\perp \vec{e}_z = r_{A\perp} F_\perp \vec{e}_z$$

För med högerhandsregeln.



Momentets riktning?

Sätt höger tummen i $\vec{M}_0$ -riktning $\rightarrow$ Fingerna anger vridningsriktning!

Givet

- $S = 250 \text{ N}$

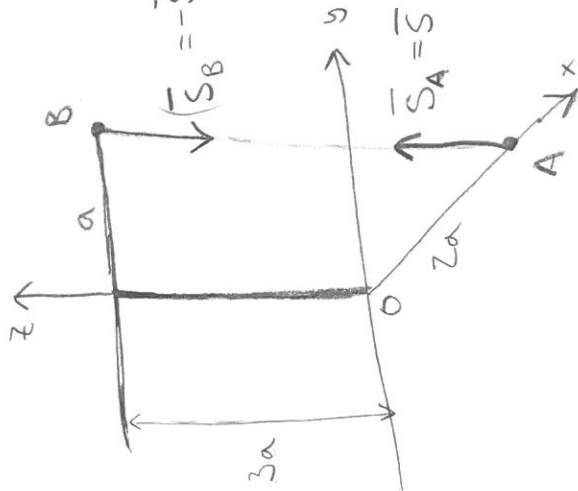
- $\vec{r}_A = (2a, 0, 0)$

- $\vec{r}_B = (0, a, 3a)$

$$a = 1 \text{ m}$$

Sökt

- $\vec{M}_O$ pga

spännkraften i A

Obs! Spännkraften i en tråd verkar alltid från ändpunkterna och inåt längs tråden.

Spännkraften som påverkar A: $\vec{S}_A = S \vec{e}_{AB}$

Spännkraften som påverkar B: $\vec{S}_B = S \vec{e}_{BA}$

Momentet

$$\vec{M}_O = \vec{r}_A \times \vec{S}_A = \vec{r}_A \times S \vec{e}_{AB} \quad (1)$$

$$\vec{e}_{AB} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A|} = \frac{(0, a, 3a) - (2a, 0, 0)}{\sqrt{14}a} = \frac{(-2, 1, 3)}{\sqrt{14}} \quad (2)$$

$$= \frac{(0, a, 3a) - (2a, 0, 0)}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A|} = \frac{a(-2, 1, 3)}{a\sqrt{14}}$$

② $\otimes \Rightarrow$

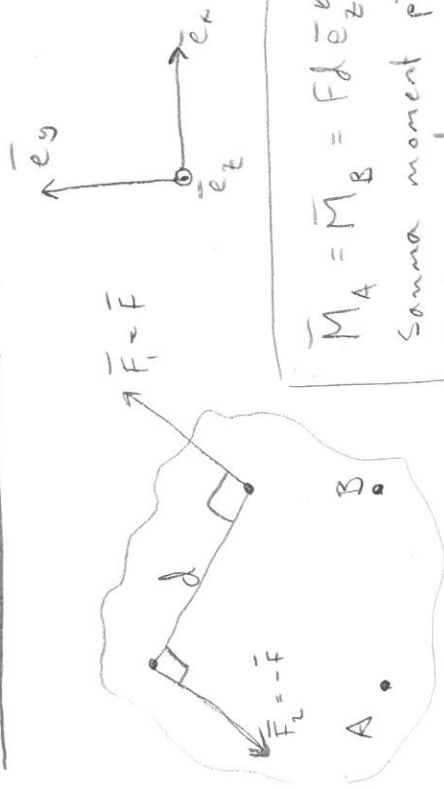
$$\vec{M}_O = S \cdot \vec{r}_A \times \vec{e}_{AB} = \frac{S}{\sqrt{14}} (2, 0, 0) \times (-2, 1, 3) =$$

$$= \frac{S}{\sqrt{14}} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{S}{\sqrt{14}} (0, -6, 2) =$$

$$= \begin{bmatrix} S = 250 \text{ N} \\ a = 1 \text{ m} \end{bmatrix} = \frac{500}{\sqrt{14}} (0, -3, 1) \text{ Nm}$$

Så, notera om man frågar: "hur påverkar spännkraften i tråden stälmen masten?", så är svaret att masten får en inbörande vinkel i motsatt riktning. För det är $\vec{S}_B$ som påverkar masten!

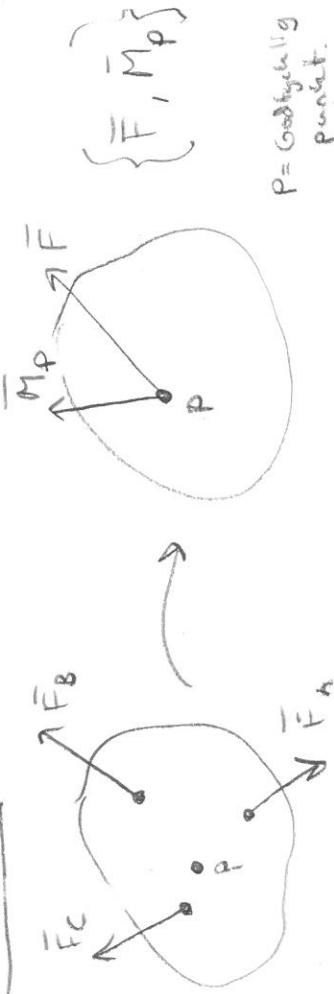
Kraftparmoment (kpm)



$\vec{M}_A = \vec{M}_B = Fd \vec{e}_z$ högerhands!
 Samma moment på alla punkter i kroppen!

Systemreduktion

Ett kraftsystem kan alltid reduceras till en kraft och ett kpm i en punkt P



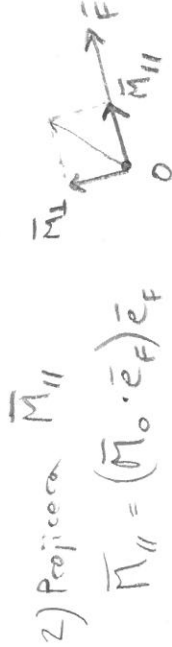
P = Godtyckligt punkt.

Recept

- 1) Kraften: P är kraftsumman $\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C$
- 2) Våre delkrafts moment m.a.p. P summeras
 $\vec{M}_P = \vec{r}_{PA} \times \vec{F}_A + \vec{r}_{PB} \times \vec{F}_B + \vec{r}_{PC} \times \vec{F}_C$

Ytterligare reduktioner

Kraftsystem $\vec{F}, \vec{M}_{II}$ + verkningslinje



3) Ersätt $\vec{M}_I$ med ny verkningslinje för $\vec{F}$

$\vec{M}_I = \vec{M}_0 - \vec{M}_{II} = \vec{r} \times \vec{F}$
 (x, y, z)

är verkningslinjen

En kraftresultant $\vec{F}$ + verkningslinje

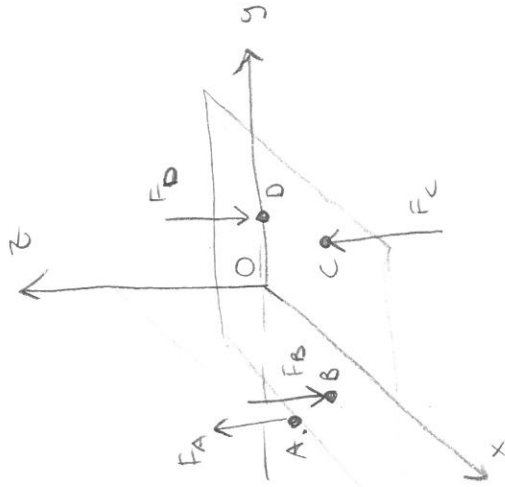
Krav för existens: $\vec{F} \neq \vec{0}$ & $\vec{F} \cdot \vec{M}_P = 0$

1) Hitta $\{\vec{F}, \vec{M}_0\}$

2) $\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$
 (x, y, z)

Om $\vec{F} = \vec{0}, \vec{M}_P \neq \vec{0}$ kan systemet reduceras till endast ett kpm (som kan angripa var som helst)

- $\vec{F}_A = (0, 0, 10)P$
- $\vec{F}_B = (0, 0, -16)P$
- $\vec{F}_C = (0, 0, 8)P$
- $\vec{F}_D = (0, 0, -4)P$
- $P = 1N$
- $\vec{r}_A = (1, -3, 0)a$
- $\vec{r}_B = (2, -1, 0)a$
- $\vec{r}_C = (2, 2, 0)a$
- $\vec{r}_D = (0, 1, 0)a$
- $a = 1m$



Sökt a) Kan systemet red. till en enkraftsresultant? (är $\vec{F} \neq \vec{0}$ & $\vec{F} \cdot \vec{M}_0 = 0$?)

b) I sådant fall ange denna $\vec{F}$ och dess verknings linje

Beräkna kraftsumman

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D = P(0, 0, 10 - 16 + 8 - 4) =$$

$$= P(0, 0, -2) = [P=1N] = (0, 0, -2)N \quad \textcircled{1}$$

$$(\vec{F} \neq \vec{0}!)$$

Beräkna momentet

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_A \times \vec{F}_A + \vec{r}_B \times \vec{F}_B + \vec{r}_C \times \vec{F}_C + \vec{r}_D \times \vec{F}_D \quad \textcircled{2}$$

$$\vec{r}_A \times \vec{F}_A = P_a \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = (-30, -10, 0)Pa \quad \textcircled{3}$$

$$\vec{r}_B \times \vec{F}_B = P_a \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{vmatrix} = (16, 32, 0)Pa \quad \textcircled{4}$$

$$\vec{r}_C \times \vec{F}_C = P_a \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = (16, -16, 0)Pa \quad \textcircled{5}$$

$$\vec{r}_D \times \vec{F}_D = P_a \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (-4, 0, 0)Pa \quad \textcircled{6}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{6} : \textcircled{2} \Rightarrow$$

$$\vec{M}_0 = P_a(-2, 6, 0) = \left[\begin{matrix} P=1N \\ a=1m \end{matrix} \right] = (-2, 6, 0)Nm \quad \textcircled{7}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{M}_0 = (0, 0, -2)P \cdot (-2, 6, 0)Pa = (0 + 0 + 0)Pa = 0$$

$\vec{F} \neq \vec{0}$ och $\vec{M}_0 \perp \vec{F} \Rightarrow$ Enkäftsresultant existerar!

Uppg. 4.3 fortsFå fram verkningslinje

$$\vec{M}_0 = (x, y, z) \times \vec{F} = P \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= P(-2y, 2x, 0) \quad (8)$$

(7) & (8) $\Rightarrow$

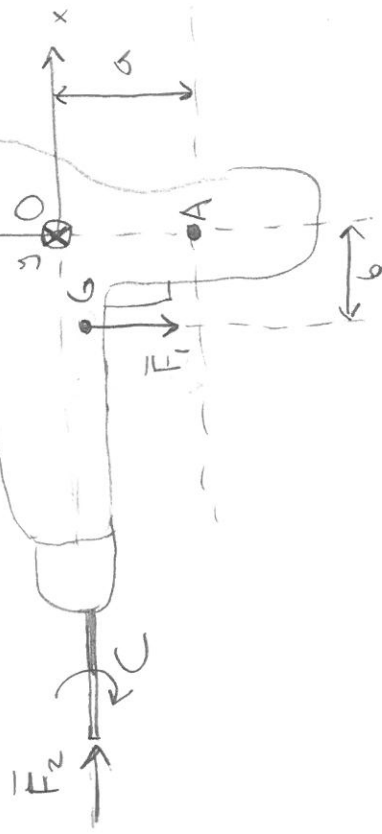
$$(-2, 6, 0) P_A = P(-2y, 2x, 0)$$

Ger elev. system

$$\left. \begin{array}{l} -2\alpha = -2y \\ 6\alpha = 2x \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 3\alpha = [a=1m] = \underline{\underline{3m}} \\ y = \alpha = [a=1m] = \underline{\underline{1m}} \\ z \text{ godtycklig} \end{array}$$

En kraftsresultanten $\vec{F} = (0, 0, -2)N$ har en verkningslinje i z-riktning genom punkten Q med

$$\text{orbekör} \quad \underline{\underline{\vec{r}_Q = (3, 1, 0)m}} \quad \underline{\underline{\quad}}$$

Givet

- $a = 150 \text{ mm}$
- $b = 200 \text{ mm}$
- $F_1 = 20 \text{ N}$
- $F_2 = 100 \text{ N}$
- $C = 10 \text{ Nm}$

Sökt

- Resultande kraft och kraftmoment i A: $\{\vec{F}, \vec{M}_A\}$

Systemet består av

- 1) Tyngdkraft, $\vec{F}_1 = -F_1 \vec{e}_z$
- 2) Tryckkraft, $\vec{F}_2 = F_2 \vec{e}_x$
- 3) Kraftmoment $\vec{M}_3 = C \vec{e}_x$

Resultande kraft

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (1)$$

Resultande moment

$$\vec{M}_A = \vec{M}_{A,1} + \vec{M}_{A,2} + \vec{M}_{A,3} \quad (2)$$

$$1) \vec{F}_1 = -F_1 \vec{e}_z \quad \text{högerhands regel!}$$

$$\vec{M}_{A,1} = F_1 \cdot b (-\vec{e}_y) = -F_1 b \vec{e}_y$$

$$2) \vec{F}_2 = F_2 \vec{e}_x \quad \text{h.h.r.}$$

$$\vec{M}_{A,2} = F_2 \cdot a (+\vec{e}_y) = F_2 a \vec{e}_y$$

3) Kraftmomentet kan flyttas direkt till A! (ingen kraft!)

$$(\vec{F}_3 = \vec{0})$$

$$\vec{M}_{A,3} = C \vec{e}_x$$

$$① \vec{F} = -F_1 \vec{e}_z + F_2 \vec{e}_x = \begin{bmatrix} F_2 = 100 \text{ N} \\ F_1 = 20 \text{ N} \end{bmatrix} = (100, 0, -20) \text{ N}$$

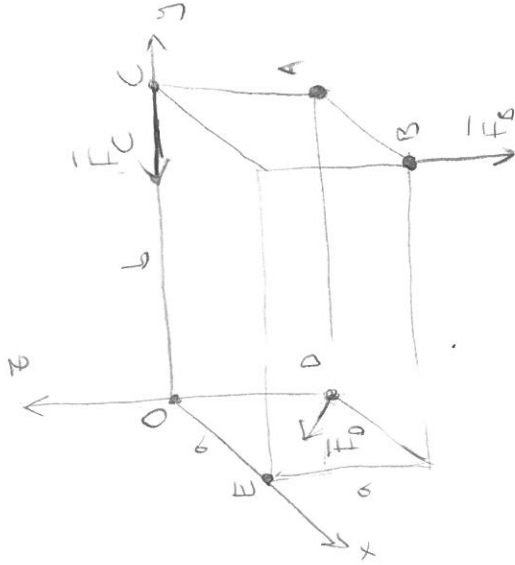
$$② \vec{M}_A = -F_1 b \vec{e}_y + F_2 a \vec{e}_y + C \vec{e}_x = \begin{bmatrix} F_1 = 20 \text{ N} \\ F_2 = 100 \text{ N} \\ a = 0.15 \text{ m} \\ b = 0.2 \text{ m} \\ C = 10 \text{ Nm} \end{bmatrix} =$$

$$= (10, 100 \cdot 0.15 - 20 \cdot 0.2, 0) \text{ Nm} =$$

$$= (10, 15 - 4, 0) \text{ Nm} = (10, 11, 0) \text{ Nm}$$

Givet

- $F_B = F_C = P$
- $F_D = 2P$
- Avstånd enligt figur



Sökt

- $\{\vec{F}, \vec{M}_A\}$
- $b = f(a)$ för att systemet ska ha en enkraftsresultant
- Kon: systemet roteras till endast ett kpm

Kraftsumman

$$\vec{F} = \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D \quad (1)$$

Utttryck krafterna

$$\vec{F}_B = F_B (-\vec{e}_2) = P(0, 0, -1) \quad (2)$$

$$\vec{F}_C = F_C (-\vec{e}_3) = P(0, -1, 0) \quad (3)$$

$$\vec{F}_D = F_D \vec{e}_D = 2P \frac{\vec{r}_E - \vec{r}_D}{|\vec{r}_E - \vec{r}_D|} = \frac{a\vec{e}_x - (-a\vec{e}_z)}{|\vec{r}_E - \vec{r}_D|}$$

$$= 2P \frac{a(1, 0, 1)}{a\sqrt{2}} = \frac{2P}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) = \sqrt{2}P(1, 0, 1) \quad (4)$$

(5)-(4) : (1) =>

$$\vec{F} = P(0, 0, -1) + P(0, -1, 0) + \sqrt{2}P(1, 0, 1)$$

Delsum a)

$$\vec{F} = (\sqrt{2}P, -P, \sqrt{2}P - P)$$

Moment : A

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}_B + \vec{r}_{AC} \times \vec{F}_C + \vec{r}_{AD} \times \vec{F}_D \quad (5)$$

Utttryck momenten

$$\vec{r}_{AB} \times \vec{F}_B = a\vec{e}_x \times -P\vec{e}_z = -Pa\vec{e}_x \times \vec{e}_z = Pa\vec{e}_y \quad (6)$$

$$\vec{r}_{AC} \times \vec{F}_C = a\vec{e}_z \times -P\vec{e}_y = -Pa\vec{e}_z \times \vec{e}_y = Pa\vec{e}_x \quad (7)$$

$$\vec{r}_{AD} \times \vec{F}_D = -b\vec{e}_y \times (\sqrt{2}P\vec{e}_x + \sqrt{2}P\vec{e}_z) =$$

$$= -\sqrt{2}Pb\vec{e}_y \times \vec{e}_x - \sqrt{2}Pb\vec{e}_y \times \vec{e}_z = -\sqrt{2}Pb\vec{e}_x + \sqrt{2}Pb\vec{e}_z$$

(6)-(7) : (5) =>

$$\vec{M}_A = (Pa - \sqrt{2}Pb, Pa, \sqrt{2}Pb) \quad \text{Delsum a)}$$

Uppgift 4.6] forts.

För att systemet ska ha en enkraftsresultant
måste $\vec{F} \perp \vec{M}_A$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{M}_A = 0$$

$$P(\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}-1) \cdot P(a-\sqrt{2}b, a, \sqrt{2}b) = 0$$

$$\sqrt{2}a - \sqrt{2}b - a + 2b - \sqrt{2}b = 0$$

$$(\sqrt{2}-1)a = \sqrt{2}b$$

$$\Rightarrow b = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} a$$

Svar b)

Svar c)
Systemet kan ej reduceras till ett leger, då

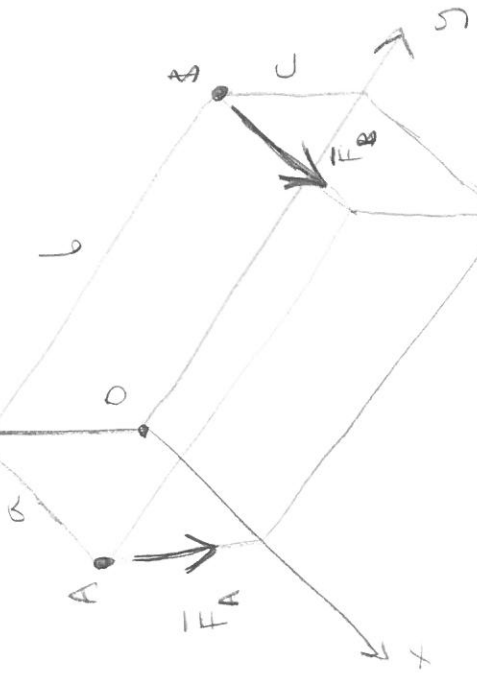
$$\vec{F} \neq \vec{0} \quad \text{för alla } P \neq 0$$

Givet

- $F_A = F_B = P$
- Avstånd enl. figur.

Sökt

- Kraftsummens moment $\bar{M}$
- Kraftsummens x, y -koordinater
där $z=0$



(Vi) Vektors produkt A x B för resp. krafts verkningslinje)

Taktik

1) Beräkna $\{\bar{F}, \bar{M}_0\}$

2) $\bar{M} = \bar{M}_{||} = (\bar{M}_0 \cdot \bar{e}_F) \bar{e}_F$

3) $\bar{M}_\perp = \bar{M}_0 - \bar{M}_{||} = \bar{r} \times \bar{F}$
(x, y, z)



①

②

Kraftsumman

$$\bar{F} = \bar{F}_A + \bar{F}_B = -P\bar{e}_z + P\bar{e}_x = P(1, 0, -1) \quad (3)$$

Momentet runt O

$$\bar{M}_0 = \bar{r}_A \times \bar{F}_A + \bar{r}_B \times \bar{F}_B \quad (4)$$

$$\bar{r}_A \times \bar{F}_A = (a\bar{e}_x + b\bar{e}_z) \times (-P\bar{e}_z) = -aP\bar{e}_x \times \bar{e}_z = aP\bar{e}_y = -c\bar{g}$$

$$\bar{r}_B \times \bar{F}_B = (b\bar{e}_y + c\bar{e}_z) \times P\bar{e}_x = -bP\bar{e}_z + cP\bar{e}_y$$

(4) =>

$$\bar{M}_0 = aP\bar{e}_y - bP\bar{e}_z + cP\bar{e}_y = P(0, a+c, -b) \quad (5)$$

Enhetsvektor för $\bar{F}$

$$\bar{e}_F = \frac{\bar{F}}{F} = \frac{P(1, 0, -1)}{P\sqrt{2}} = \frac{(1, 0, -1)}{\sqrt{2}} \quad (6)$$

(5), (6) x (1) =>

$$\bar{M} = \bar{M}_{||} = \left(P(0, a+c, -b) \cdot \frac{(1, 0, -1)}{\sqrt{2}} \right) \bar{e}_F =$$

$$= \frac{P}{\sqrt{2}} b \bar{e}_F = \frac{Pb}{\sqrt{2}} \frac{(1, 0, -1)}{\sqrt{2}} = \frac{Pb}{2} (1, 0, -1) \quad \text{Delsvar}$$

Vinkelrät komp. $\bar{M}_{0,\perp}$

$$\bar{M}_\perp = \bar{M}_0 - \bar{M}_{||} = P(0, a+c, -b) - P\left(\frac{b}{2}, 0, -\frac{b}{2}\right) =$$

$$= P\left(-\frac{b}{2}, a+c, -\frac{b}{2}\right) \quad (7)$$

Uppg. 4.10] forts.

Hitta $\bar{F}$ s verkställingslinje som motvarar $\bar{M}_{0,1}$

$$\bar{M}_1 = (x, y, z) \times \bar{F} \quad (8)$$

$$(x, y, z) \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad P = P(-y, z+x, -y) \quad (9)$$

$$\textcircled{7} - \textcircled{9} \Rightarrow$$

$$R\left(-\frac{b}{2}, a+c, -\frac{b}{2}\right) = R(-y, x+z, -y)$$

$$\Rightarrow$$

$$\underline{\underline{y = \frac{b}{2}}} \quad \underline{\underline{x+z = a+c}}$$

$$\underline{\underline{När \quad z=0 \Rightarrow}}$$

$$\boxed{\underline{\underline{y = \frac{b}{2}}} \quad \underline{\underline{x = a+c}}} \quad \underline{\underline{\text{Delsvar}}}$$