

Repetition

Positionsvektor

$\vec{r}_A$: vektor från O till A

$\vec{r}_{AB}$: vektor från A till B

Enhetsvektor

$\vec{e}_x = (1, 0, 0)$: enhetsvektor : x-riktning ($e_x = 1$)

$\vec{e}_{AB} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A|}$: enhetsvektor : $\vec{r}_{AB}$ -riktning

Kraft

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

$$F = |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Belopp av $\vec{F}$

$\vec{F} = F \vec{e}_{AB}$ om A & B är 2 punkter på kraftens verkningslinje

Moment runt A (2D)
(Vridmoment, kraftmoment) $\vec{F}$



① $\vec{r}_{AB}$
② $\vec{F}$

$$\Rightarrow \vec{M}_A = \vec{r}_{AB} \times \vec{F} = r_{AB} \cdot F \cdot (-\vec{e}_z)$$

Moment runt axel λ



1. Räkna ut momentet runt punkt A på λ

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AP} \times \vec{F}$$

2. Projicera på axeln

$$M_\lambda = \vec{M}_A \cdot \vec{e}_{AB}$$

Reduktionsresultat i A / resultant i A

Resultande kraft $\vec{F}$ och kraftmoment $\vec{M}_A$ av ett kraftsystem i A.

Enkraftsresultant

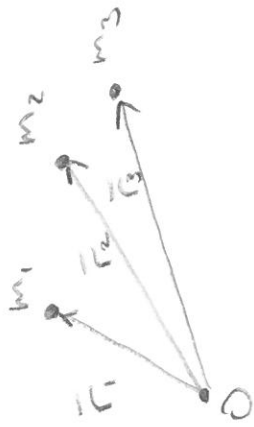
En kraft med verkningslinje som ersätter reduktionsresultatet i A

Krav för existens: $\vec{F} \cdot \vec{M}_A = 0$

Masscentrum | Var angiver tyngdekraften:

Partikelsystem

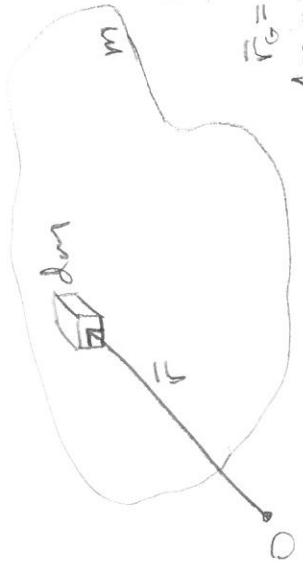
$$\begin{aligned}\bar{r}_G &= \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{\sum m_k} \\ &= \frac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 + m_3 \bar{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}\end{aligned}$$



(som ett vektort medelvärde)

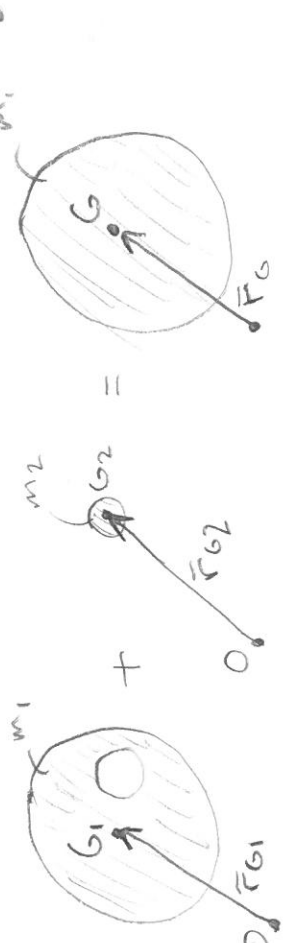
Kontinuerlig massfördelning

$$\bar{r}_G = \frac{\int \bar{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \bar{r} dm}{m}$$



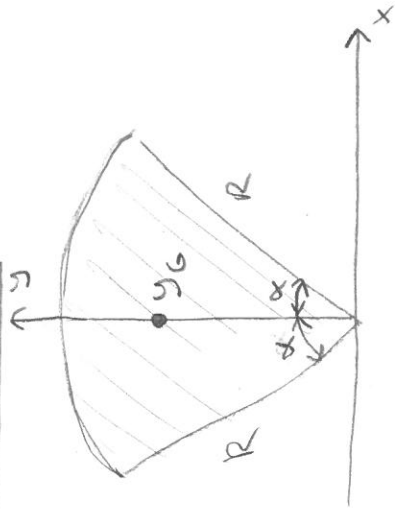
$$\begin{aligned}\text{Homogen, 2D} \quad \bar{r}_G &= \frac{\iint \bar{r} dA}{\iint dA} \quad \text{Area-densitet} \\ \text{Homogen, 3D} \quad \bar{r}_G &= \frac{\iiint \bar{r} dV}{\iiint dV} \quad \text{Volym-densitet}\end{aligned}$$

Sammansatt kropp



$$\bar{r}_G = \frac{\sum m_k \bar{r}_{Gk}}{\sum m_k} = \frac{m_1 \bar{r}_{G1} + m_2 \bar{r}_{G2}}{m_1 + m_2}$$

Uppgift 5.2



Givet

- Se figur
- Homogen cirkelsektor ($\rho = \text{konstant}$)
- Sökut
- y_G

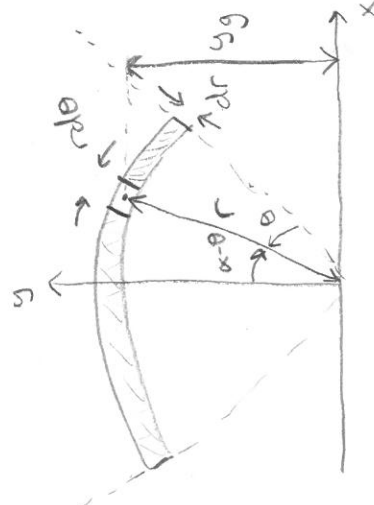
Masscentrum

$$\bar{r}_G = \frac{\int \bar{r} dm}{\int dm}$$

i givet

$$y_G = \frac{\int y_G dm}{\int dm} \quad (1)$$

Var är y_G & dm ?



V: inför vinkel θ och radiellt avstånd r

$$y_G = r \cos(\alpha - \theta) \quad (2)$$

$$dm = \rho dA = \rho r dr d\theta \quad (3)$$

$$\theta: 0 \rightarrow 2\alpha$$

$$r: 0 \rightarrow R$$

V: bygger integralerna uttryck

$$\int dm = \int_{\theta=0}^{2\alpha} \int_{r=0}^R \rho r dr d\theta = \int_0^{2\alpha} \rho \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R d\theta =$$

$$= \frac{\rho R^2}{2} \int_0^{2\alpha} d\theta = \frac{\rho R^2}{2} \cdot 2\alpha = \alpha \rho R^2 \quad (4)$$

$$\int y_G dm = \int_{\theta=0}^{2\alpha} \int_{r=0}^R r \cos(\alpha - \theta) \cdot \rho r dr d\theta =$$

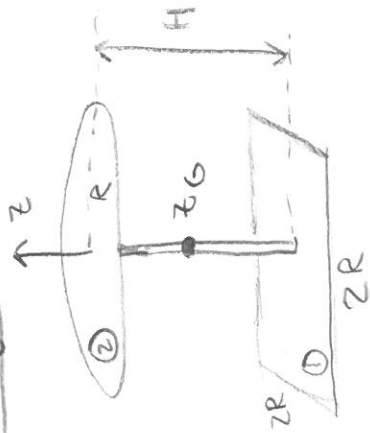
$$= \rho \int_0^{2\alpha} \cos(\alpha - \theta) d\theta \cdot \int_0^R r^2 dr =$$

$$= \rho \left[-\sin(\alpha - \theta) \right]_0^{2\alpha} \cdot \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R =$$

$$= \rho \left(\frac{-\sin(-\alpha) + \sin \alpha}{\sin \alpha} \right) \cdot \frac{R^3}{3} = \rho \cdot \frac{2 \sin \alpha R^3}{3} \quad (5)$$

(1) (4) & (5) $\Rightarrow$

$$y_G = \frac{2 \rho R^3 \sin \alpha}{3} / \alpha \rho R^2 = \frac{2 R \sin \alpha}{3 \alpha}$$



Givet

- Tyng (homogena) skivor på en brett (masslös)

stäng

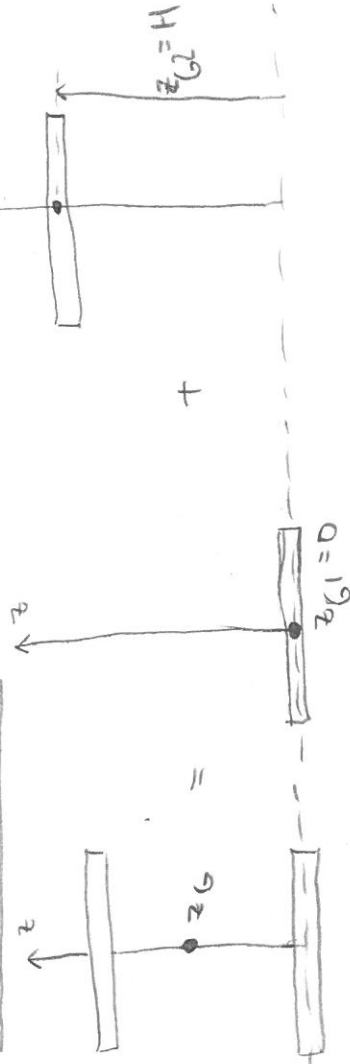
- Avstånd enl. figur

Sålt

- z_G för sammansatt kropp

kropp

Kropp består av



$$m_1 = \rho \cdot (2R)^2 \quad m_2 = \rho \cdot \pi R^2$$

Masscentrum för sammansatt kropp

$$(m_1 + m_2) z_G = m_1 z_{G1} + m_2 z_{G2}$$

$$\Rightarrow z_G = \frac{\rho \cdot (2R)^2 \cdot 0 + \rho \pi R^2 \cdot H}{\rho (2R)^2 + \rho \pi R^2} =$$

$$= \frac{\pi H R^2}{4R^2 + \pi R^2} = \frac{\pi}{4 + \pi} H$$

Svar

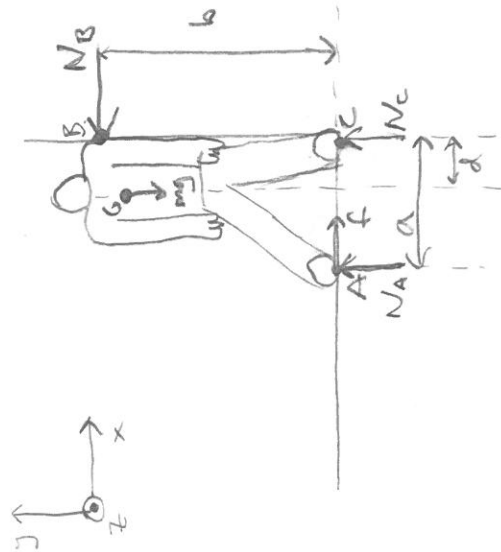
Jämvikt

Resultanten av ett kraftsystem på en kropp:

$$\begin{aligned} \vec{F}_A &= \vec{0} \\ M_A &= \vec{0} \end{aligned}$$

i alla punkter A i kroppen.

Exempel (person mot vägg)



Kraft & momentjämvikt

$$\begin{aligned} x: f - N_B &= 0 \quad (1) \\ y: N_A + N_C - mg &= 0 \quad (2) \\ \sum \tau: -N_A \cdot a + mgd + N_B b &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Vad händer om personen i A?

$$N_A = 0! \quad (f=0)$$

Recept

- Ta reda på alla krafter/moment
- Räkna ut kraftsumma $\vec{F}$
- Kraftjämvikt $\vec{F} = \vec{0}$
 $\Rightarrow$ Lös ut obekanta!
- Fortfarande obekanta?
 $\Rightarrow$ Beräkna momentj.v.
 runt godtycklig punkt A
 $M_A = \vec{0}$.

$$(1) \Rightarrow N_B = 0$$

$$(2) \Rightarrow N_C - mg = 0$$

$$(3) \Rightarrow mgd + N_B b = 0$$

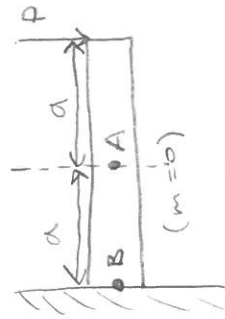
$$> 0$$

Ej jämvikt!

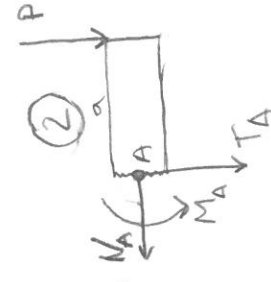
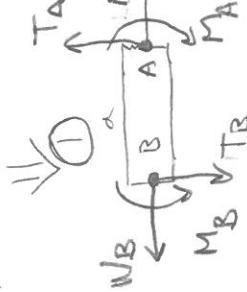
$\Rightarrow$ Personen tippar!

System i vila = Jämvikt i alla delsystem

Snälla & frilagga



Hur påverkas punkter A & B?



J.v. i båda systemen!

(1)

$$\begin{aligned} \rightarrow: N_A - N_B &= 0 \\ \uparrow: T_A - T_B &= 0 \\ \curvearrowright: T_A + M_B - M_A &= 0 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \rightarrow: -N_A &= 0 \\ \uparrow: P - T_A &= 0 \\ \curvearrowright: M_A - P a &= 0 \end{aligned}$$

Geelv. & 6 obekanta: $M_A, M_B, N_A, N_B, T_A, T_B$

Tips: Färläggning, reducerad antal oberoende

[se sid 86-87]

Fixt inspänd (generellt)



$$\frac{2D}{3} (M_z, F_x, F_y)$$

$$\frac{3D}{6} (M_x, M_y, M_z, F_x, F_y, F_z)$$

Gjakt led



$$\frac{2D}{2} (F_x, F_y)$$

$$\frac{3D}{5} (M_x, M_y, F_x, F_y, F_z)$$

Gjakt led på gjakt underlag



$$\frac{2D}{1} (F_y)$$

$$\frac{3D}{1} (\text{kedjed})$$

$$1 (F_y)$$

$$F_y > 0!$$

ledar el. hylsa



$$\frac{2D}{1} (F_y)$$

$$\frac{3D}{2} (F_y, F_z)$$

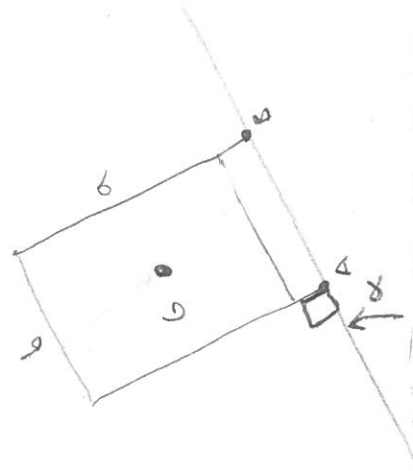
gjakt led

Uppgift 6.4

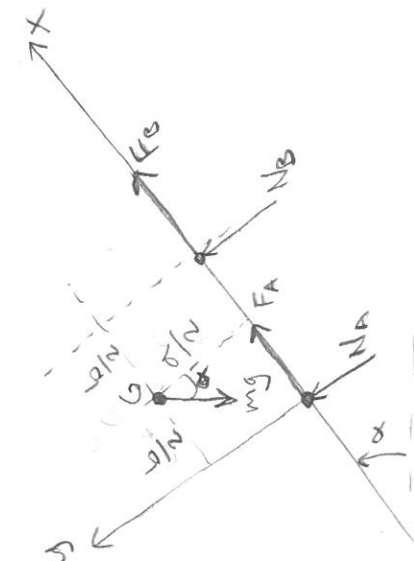
Givet
• m, a, b, α

Sök
• N_A & N_B

• $\alpha_{\max}$ för jämvikt



Fritäggning och inre koordinatsystem



Obs!
Byrån antas vara homogen!

Obs 2
Klubben innebär att byrån inte kan glida, F_A har ingen övre gräns!

Jämviktslsg.

(x: $F_A + F_B - mg \sin \alpha = 0$)

y: $N_A + N_B - mg \cos \alpha = 0$

(A): $N_B \cdot b + mg \sin \alpha \cdot \frac{a}{2} - mg \cos \alpha \cdot \frac{b}{2} = 0$ (2)

(2) $\Rightarrow$

$$N_B b = \frac{mgb}{2} \cos \alpha - \frac{mga}{2} \sin \alpha$$

(3) $\Rightarrow N_B = \frac{mg}{2} \left(\cos \alpha - \frac{a}{b} \sin \alpha \right)$

Delsvär

(1) & (3) $\Rightarrow$

$$N_A = mg \cos \alpha - \left(\frac{mgb \cos \alpha}{2} - \frac{mga \sin \alpha}{2b} \right) =$$

$$= \frac{mg}{2} \left(\cos \alpha + \frac{a}{b} \sin \alpha \right)$$

Delsvär

Jämvikten bryts då $N_B = 0$! ($\alpha = \alpha_{\max}$)

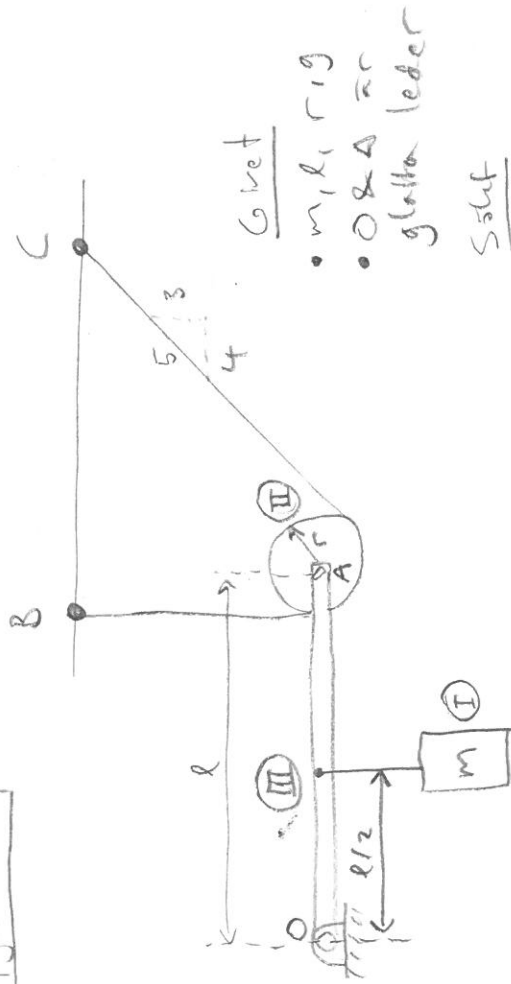
(3) $\Rightarrow$

$$\cos \alpha_{\max} - \frac{a}{b} \sin \alpha_{\max} = 0$$

$$\frac{\sin \alpha_{\max}}{\cos \alpha_{\max}} = \frac{b}{a} \Rightarrow \tan \alpha_{\max} = \frac{b}{a}$$

$$\alpha_{\max} = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right)$$

Delsvär

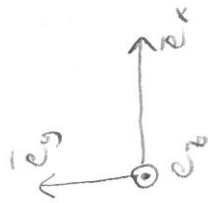


Givet

- m, l, r, g
- O & A är glatta leder

Sök

- S (spänkraft i snöre)
- $\vec{R}_O$ (reaktionskraft i O på beamen)



Obs! "Glatta leder" = Inget moment kan överföras
 i z-rikt. Bero krakter i
 x- och y-rikt!

Frilägg

I Viden



$$\uparrow: S_I - mg = 0$$

$$\Rightarrow S_I = mg$$

Kraftjämvikt

II Iriden



Kraftj.v.

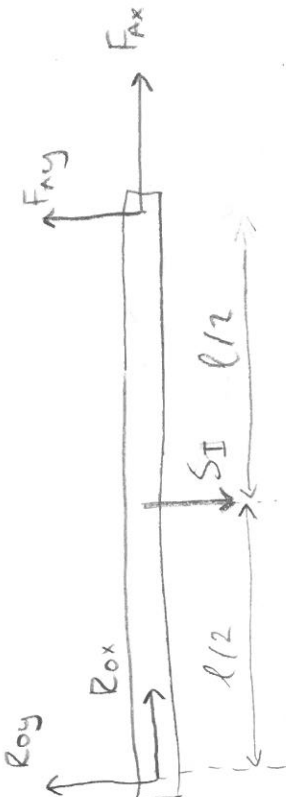
$$\uparrow: S - F_{Ay} + S \sin \alpha = 0$$

$$F_{Ay} = S \left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{8}{5} S \quad (1)$$

$$\rightarrow: -F_{Ax} + S \cos \alpha = 0$$

$$F_{Ax} = \frac{4}{5} S \quad (2)$$

III Stängen OA



Kraftj.v.

$$\rightarrow: R_{Ox} + F_{Ax} = 0 \Rightarrow R_{Ox} = -\frac{4}{5} S \quad (3)$$

$$\uparrow: R_{Oy} + F_{Ay} - S_I \stackrel{=mg}{=} 0 \Rightarrow R_{Oy} = mg - \frac{8}{5} S \quad (4)$$

Momentj.v.

$$\curvearrowleft: -S_I \cdot \frac{l}{2} + F_{Ay} \cdot l = 0 \Rightarrow F_{Ay} = \frac{mg}{2}$$

Uppgift 6.9] forts.

① $\Rightarrow$

$$\frac{mg}{2} = \frac{8}{5} S \Rightarrow S = \frac{5}{16} mg$$

Delsvar

② $\Rightarrow$

$$R_{ox} = -\frac{4}{5} S = -\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{16} mg = -\frac{mg}{4}$$

Delsvar

④ $\Rightarrow$

$$R_{oy} = mg - \frac{8}{5} S = mg - \frac{8}{5} \cdot \frac{5}{16} mg = \frac{mg}{2}$$

Delsvar

Notera att eftersom $R_{ox} < 0$, så var den ansatta riktningen felaktig.

Egentligen pekar $\vec{R}_0$ snett åt vänster!



Så, man måste inte ansätta rätt riktningar från början. Välj någon riktning, och var noga med att rita krafterna och momenten från kropp A på kropp B i motsatt riktning mot kraften och moment från B på A.

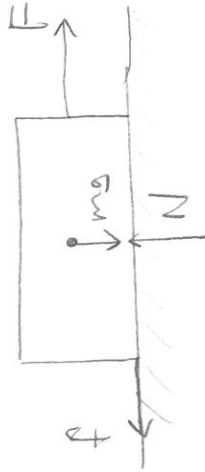
För ni minskningen i svaret, betyder det att de ansatta riktningarna var felaktiga.

Jämvikt med friktion

Jämvikt

$$\rightarrow : F - f = 0 \Rightarrow \boxed{f = F}$$

$$\uparrow : N - mg = 0 \Rightarrow \boxed{N = mg}$$



Friktionsvillkor: Jämvikt om $\boxed{f \leq \mu N}$

I vänt fall: Jämvikt om $\boxed{F \leq \mu mg}$

Vad händer om $F > \mu mg$?
 $\Rightarrow$ Lådan börjar glida! J.v ej möjlig!

Gräns till glidning: $\boxed{f = \mu N} \Rightarrow F = \mu mg$



Strategi

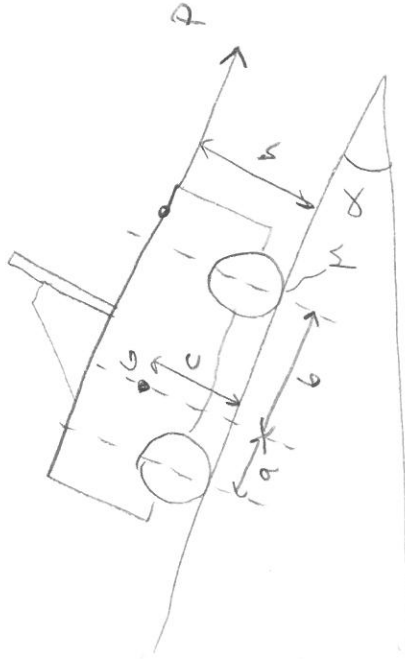
- $\rightarrow$ Lös ut f och N genom jämviktsekv.
- $\rightarrow$ Om systemet är "på gränsen till glidning":
 - $\rightarrow$ sätt $f = \mu N$ vid de kontaktställen där glidning sker först.
- $\rightarrow$ Vet man ej var den glider först:
 - $\rightarrow$ Gör ett antagande att något kontaktställe är på gräns till glidning.
 - $\rightarrow$ Lös jämviktsekv.
 - $\rightarrow$ Kolla att alla andra kontaktställen uppfyller $f < \mu N$.

Givet

- $a, b, c, m, g, \mu, \alpha, h$
- Baljuleddriven!
- konstant fart $\Rightarrow$ jämvikt!

Sökt

- Vad är $P_{\max}$?



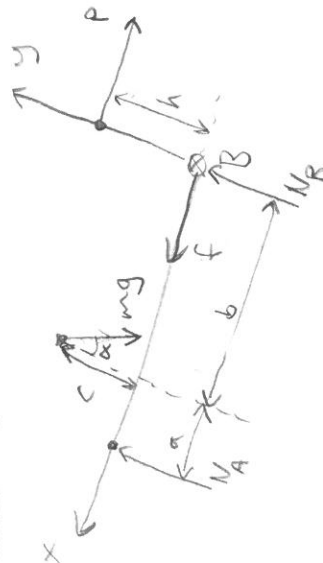
OBS Baljuleddriven $\Rightarrow$ endast friktion vid baljuleddet!

Friktning

Kraftjämvikt

$$x: f - mg \sin \alpha - P = 0 \quad (1)$$

$$y: N_A + N_B - mg \cos \alpha = 0 \quad (2)$$



Momentjämvikt runt B

$$\sum \tau_B: -N_A(a+b) + mg \cos \alpha \cdot b - mg \sin \alpha \cdot c - Ph = 0 \quad (3)$$

I vå kritiska fall

1) Friktionskraften "stor", lastbilen väljer runt B

$$N_A = 0 \quad \text{då} \quad P = P_{\max}^{(1)}$$

(3) $\Rightarrow$

$$P_{\max}^{(1)} = \frac{bc \cos \alpha - c \sin \alpha}{h} mg$$

2) Friktionskraften "liten", lastbilen glider i B

$$f = \mu N_B \quad \text{då} \quad P = P_{\max}^{(2)}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{P_{\max}^{(2)} + mg \sin \alpha}{\mu} \quad (4)$$

$$(4) \times (2) \Rightarrow N_A = mg \cos \alpha - \frac{P_{\max}^{(2)} + mg \sin \alpha}{\mu} \quad (5)$$

$$(5) \times (3) \Rightarrow - (a+b) mg \cos \alpha + \frac{(a+b) P_{\max}^{(2)}}{\mu} + \frac{(a+b) mg \sin \alpha}{\mu} +$$

$$+ mg b \cos \alpha - mg c \sin \alpha - P_{\max}^{(2)} \cdot h = 0$$

$$\Rightarrow [-\mu a \cos \alpha + (a+b-\mu c) \sin \alpha] mg + (a+b-\mu h) P_{\max}^{(2)} = 0$$

$$P_{\max}^{(2)} = \frac{\mu a \cos \alpha + (\mu c - a - b) \sin \alpha}{a + b - \mu h} mg$$

(Uppgift 6.21) forts.

Vad händer givet att:

$$\alpha = 1\text{m}, b = 2\text{m}, c = 1\text{m}, h = 1.5\text{m}, \mu = 0.8, \alpha = 15^\circ$$

$$P_{\max}^{(1)} = \frac{2 \cdot \cos(15^\circ) - 1 \cdot \sin(15^\circ)}{1.5} mg = \underline{\underline{1.11mg}}$$

$$P_{\max}^{(2)} = \frac{0.8 \cdot 1 \cdot \cos(15^\circ) + (10.8 - 1 - 2) \sin(15^\circ)}{1 + 2 - 0.8 \cdot 1.5} mg =$$

$$= \underline{\underline{0.11mg}}$$

Eftersom $P_{\max}^{(2)} < P_{\max}^{(1)}$ kommer lastkulan
att glida när $P > 0.11mg$ och jämvikten bryts!

MEN!

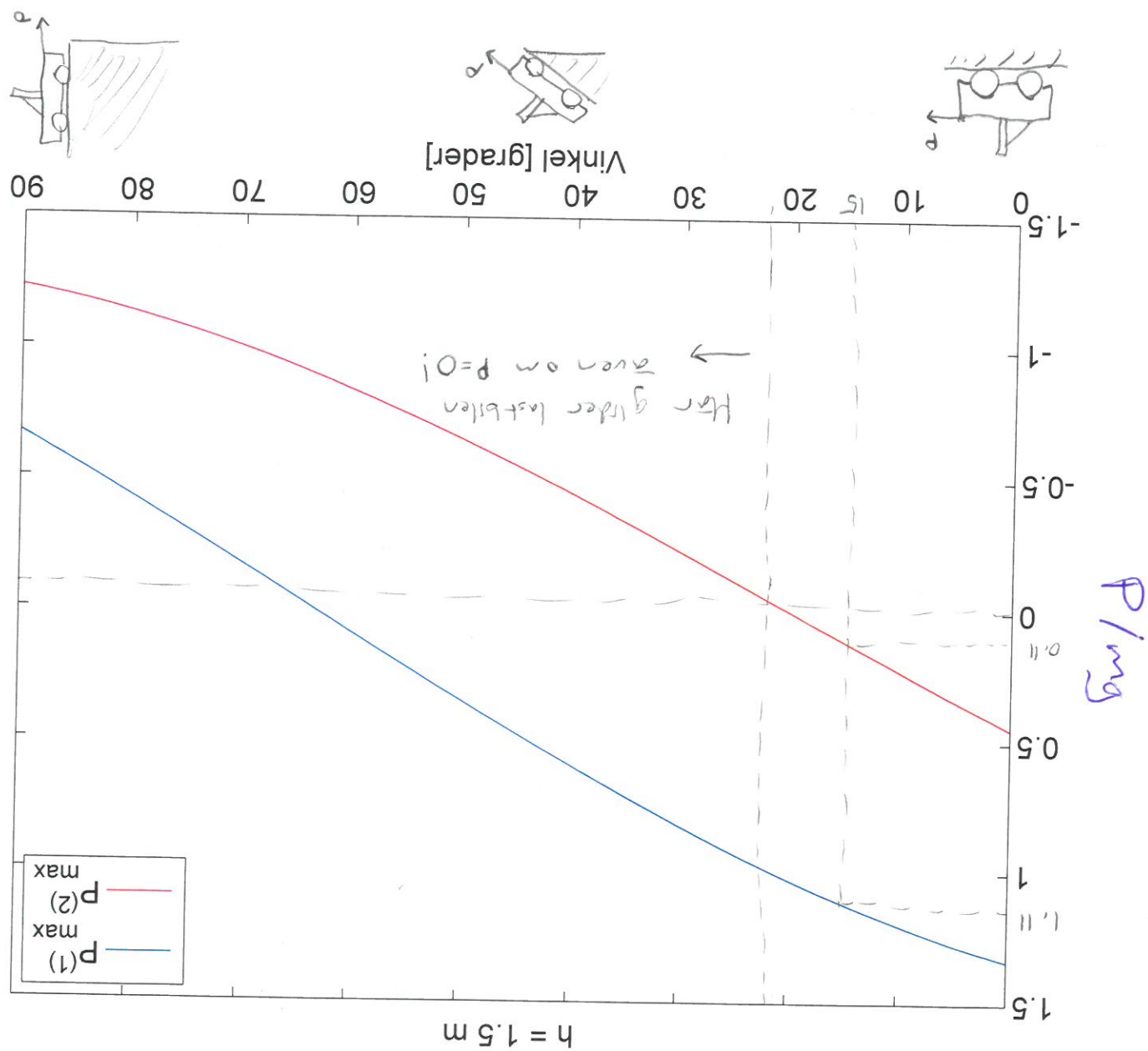
Vi kan inte utan gissa värden veta
vilken som är störst!

Tex. För gissa värden kommer den
alltid glida för alla $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ]$

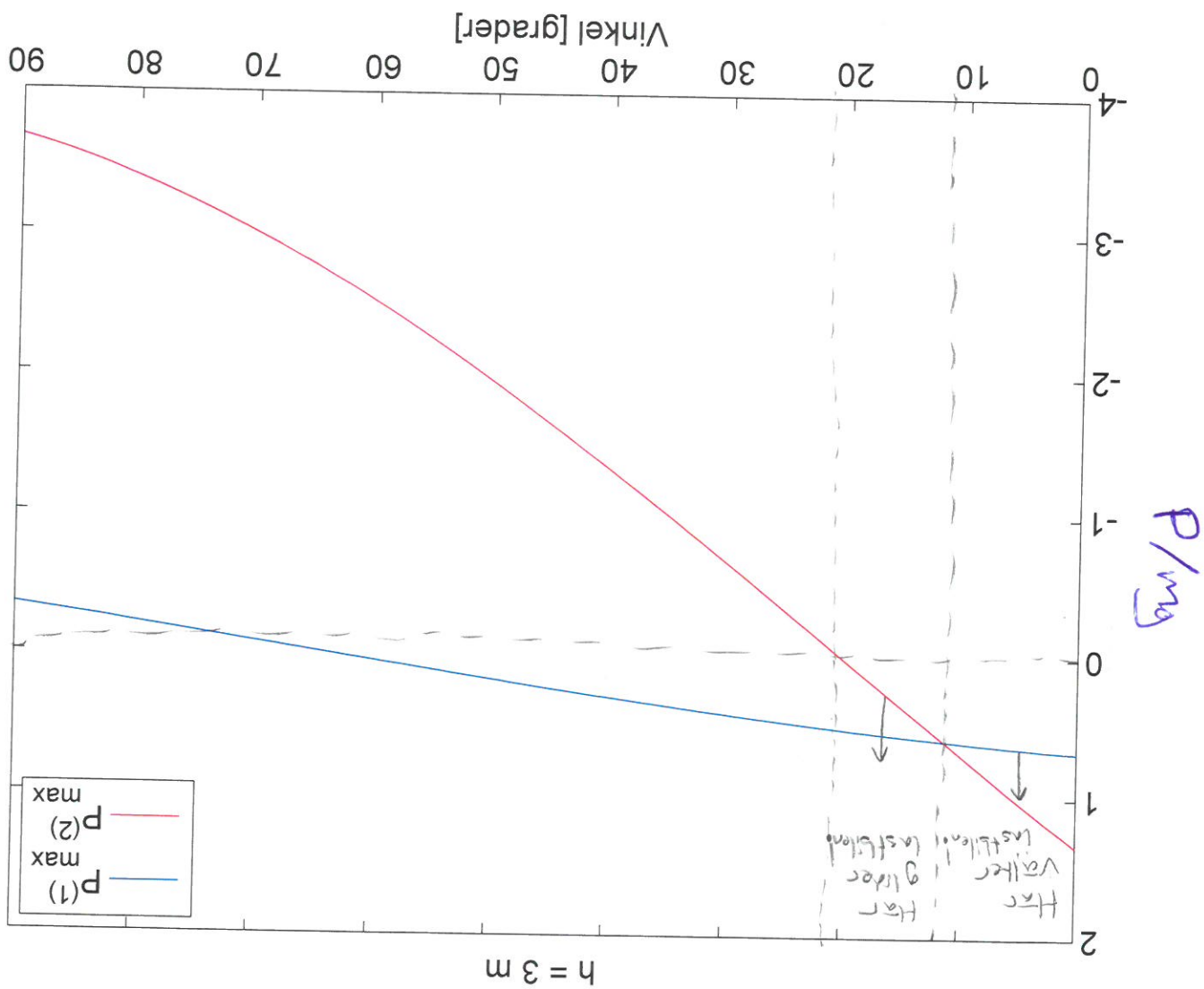
MEN! Om $h = 3\text{m}$, då kommer
den välta först om $\alpha < 11.3^\circ$
och glida först om $\alpha > 11.3^\circ$

Se bifogade grafer

Uppgift 6.21
med $h = 1.5\text{ m}$

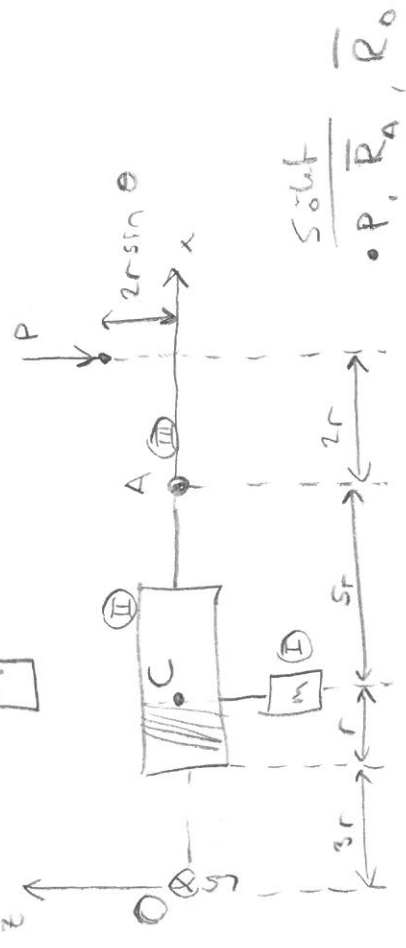
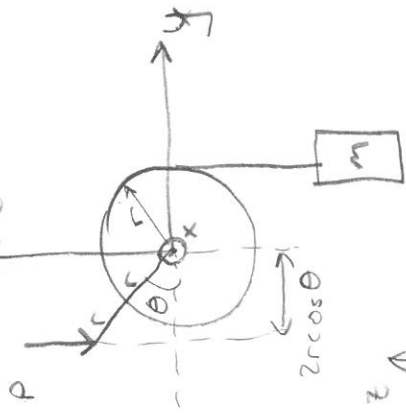


Uppgift 6.21
med
 $h = 3\text{ m}$



Givet

- se figur
- Glatte leder i O & A
- Trumma & stång hor. ej massa
- $P, m, (r), \theta$



Sökt
• $P, \bar{P}_A, \bar{P}_O$

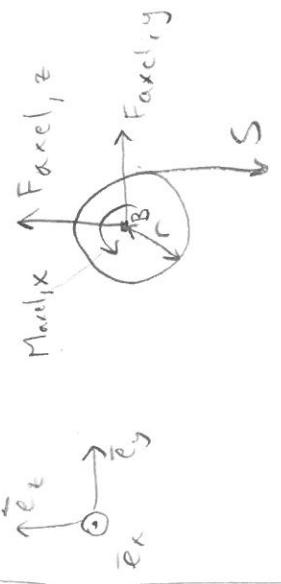
I Förlägg vilken

kraftf.v.

$$\uparrow: S - mg = 0 \Rightarrow S = mg$$



II Trumman, sida

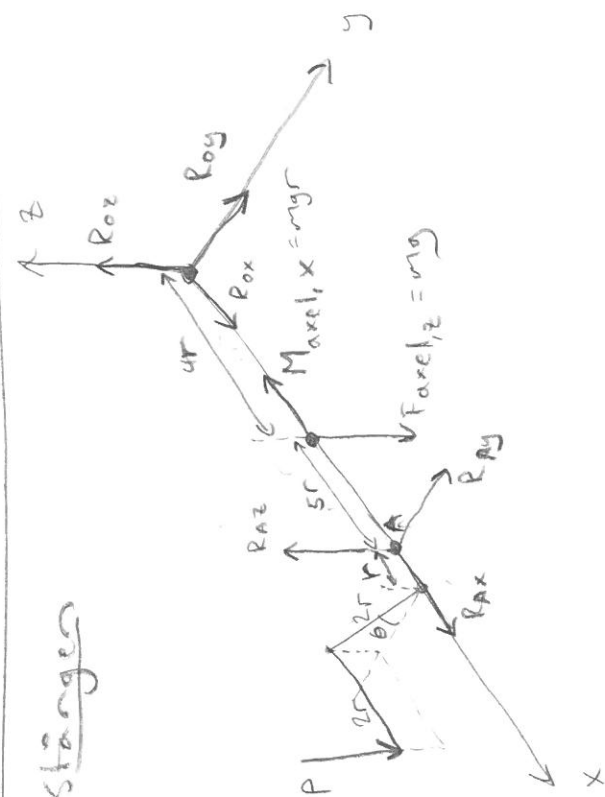


Momentf.v.

$$\curvearrowright B: M_{axel,x} - S r = 0 \Rightarrow M_{axel,x} = mgr$$

Vi kan nu ersätta trumman med kraft och moment i C

III Stängeln



Kraftjämvikt

$$x: R_{Ax} + K_{Ox} = 0 \quad (1)$$

$$y: R_{Ay} + R_{Oy} = 0 \quad (2)$$

$$z: -P + R_{Az} - mg + R_{Oz} \quad (3)$$

Momentjämvikt runt O

$$x: P \cdot 12 \cos \theta - mg \cdot 4 = 0$$

$$\Rightarrow P = \frac{mg}{2 \cos \theta} \quad \text{lös svar}$$

$$y: P \cdot 12 \sin \theta - R_{Az} \cdot 4 + mg \cdot 4 = 0$$

$$R_{Az} = \frac{12P + 4mg}{4} = \frac{12 \cdot \frac{mg}{2 \cos \theta} + 4mg}{4} = \frac{6 + 4 \cos \theta}{\cos \theta} mg \quad (4)$$

3 & 4 $\rightarrow$

$$R_{Oz} = P + mg - R_{Az} = \frac{mg}{2 \cos \theta} + mg - \frac{6 + 4 \cos \theta}{\cos \theta} mg =$$

$$= \frac{9 + 18 \cos \theta - 12 - 8 \cos \theta}{18 \cos \theta} mg = \frac{10 \cos \theta - 3}{18 \cos \theta} mg$$

$$z: R_{Ay} \cdot q \cdot r = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 0 \quad (5)$$

$$(2) \& (5) \Rightarrow R_{Oy} = 0$$

Så vad händer i x-led?

Lederna i O & A kan inte överföra kraft i x-led, och inga yttre krafter i x-led.

$$\Rightarrow R_{Ax} = R_{Ox} = 0$$

Svar: $P = \frac{mg}{2 \cos \theta}$

$\vec{R}_O = (0, 0, \frac{10 \cos \theta - 3}{18 \cos \theta} mg)$

$\vec{R}_A = (0, 0, \frac{6 + 4 \cos \theta}{18 \cos \theta} mg)$