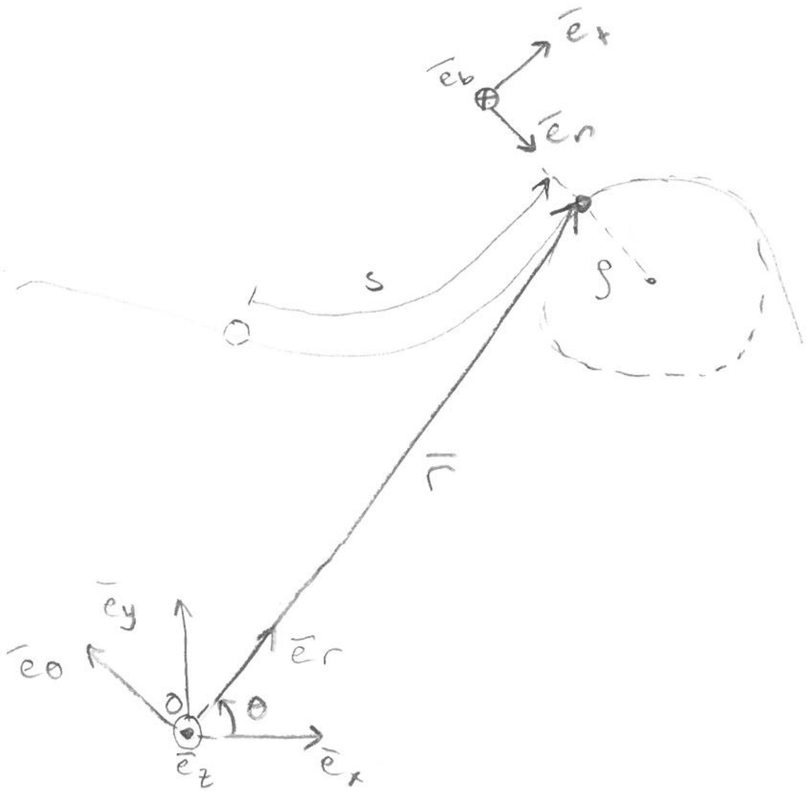
Repetition Kinematik



Kartesiska

$\bar{r} = x\bar{e}_x + y\bar{e}_y + z\bar{e}_z$

$\bar{v} = \dot{x}\bar{e}_x + \dot{y}\bar{e}_y + \dot{z}\bar{e}_z$

$\bar{a} = \ddot{x}\bar{e}_x + \ddot{y}\bar{e}_y + \ddot{z}\bar{e}_z$

Naturliga

$\bar{r} = \bar{r}(s)$ (kan ej uttryckas i nat.koord utan $\bar{v}$ & $\bar{a}$)

$\bar{v} = \dot{s}\bar{e}_t$

$\bar{a} = \ddot{s}\bar{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{e}_n$

Cylinder

$\bar{r} = r\bar{e}_r + z\bar{e}_z$

$\bar{v} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\theta}\bar{e}_\theta + \dot{z}\bar{e}_z$

$\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\bar{e}_\theta + \ddot{z}\bar{e}_z$

Kraftekvationen

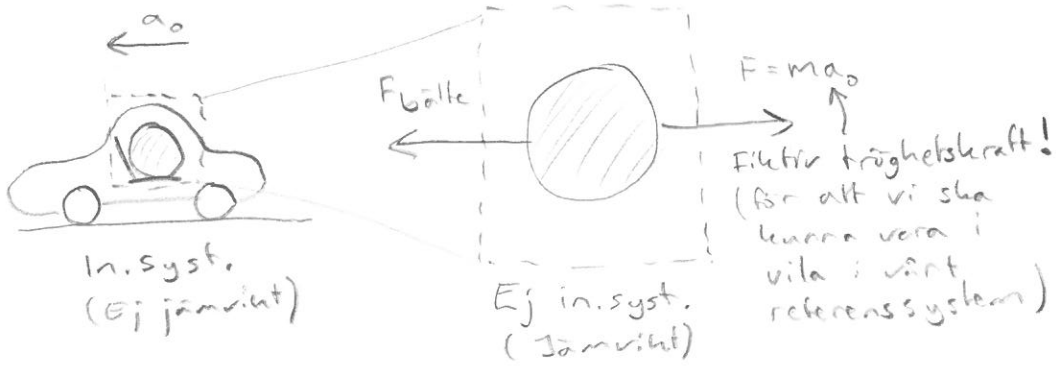
$\boxed{\bar{F} = m\bar{a}}$ (vet vi krafter som verkar på ett föremål, vet vi accelerationen)

Inertialsystem (in.syst.)

→ Ett system där $\bar{F} = m\bar{a}$ gäller

→ Ett system som accelererar i förhållande till ett in.syst. är självt ej ett in.syst.

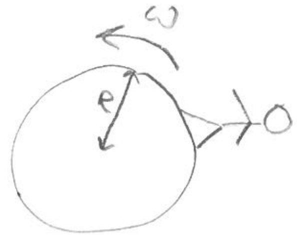
Ex. bromsande bil



Ex: karusell

För att beskriva mekanik i ett icke-in.syst. ⇒ Introducera tröghetskrafter

Är jorden ett in.syst.?



$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R = \left[\begin{array}{l} \omega = \frac{2\pi}{60 \cdot 60 \cdot 24}\ \text{rad/s} \\ R = 6 \cdot 10^6\ \text{m} \end{array}\right] \approx 0.032\ \text{m/s}^2$$

(att jämföra med $g = 9.82\ \text{m/s}^2$)

Är jordens centrum ett in.syst?

$$\frac{v_{jord}^2}{\rho_{solavstånd}} \approx 0.006\ \text{m/s}^2$$

Är solens centrum ett in.syst?

$$\frac{v_{sol}^2}{R_{galaxcentrumavstånd}} \approx 2 \cdot 10^{-10}\ \text{m/s}^2$$

Är galaxens centrum ett in.syst?

. . . . . ?

$\boxed{\text{Typtal: kraftekvationen}}$

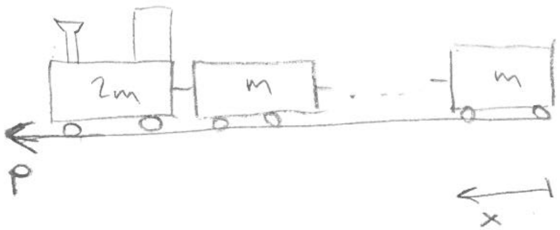
→ ställ upp i lämpligt koordinatsystem
(komponentvis)

Kart.	Nat.	Cylinder
$m\ddot{x} = F_x$	$m\ddot{s} = F_t$	$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r$
$m\ddot{y} = F_y$	$m\dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n$	$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta$
$m\ddot{z} = F_z$	$0 = F_b$	$m\ddot{z} = F_z$

Integrera och lös m.h.a. begynnelsevillkor!

Uppgift 8.31

Lok + vagn 1 + ... vagn 10



Givet

- m, P
- 10 vagnar

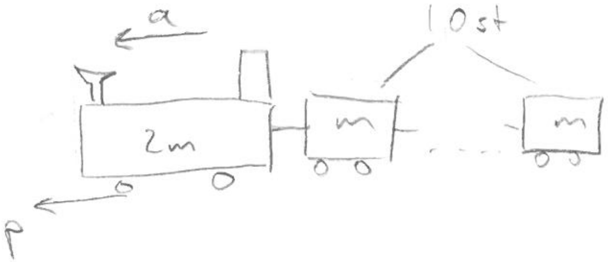
Sökt

- Dragkrafterna mellan varje vagn i
  - T_1
  - T_2
  - T_n

Obs! Alla vagnar har samma acceleration!

$\ddot{x} = a$

Frilägg lok + vagnar

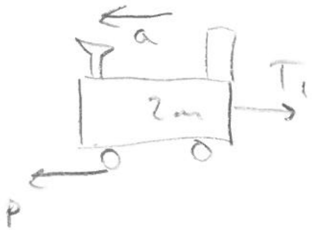


Kraftekv

$$12ma = P$$

$$\Rightarrow ma = \frac{P}{12} \quad (1)$$

Frilägg lok

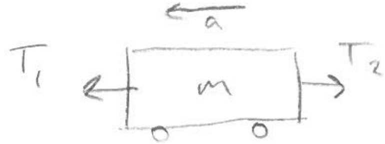


Kraftekv

$$2ma = P - T_1$$

$$\Rightarrow T_1 = P - 2ma \overset{(1)}{=} \frac{10}{12} P \quad (2)$$

Frilägg vagn 1

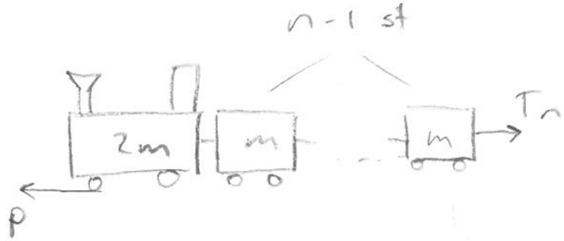


Kraftekv

$$ma = T_1 - T_2$$

$$\Rightarrow T_2 = T_1 - ma \overset{(2)}{=} \frac{9}{12} P$$

Frilägg lok + vagn 1 till n-1



Kraftekv

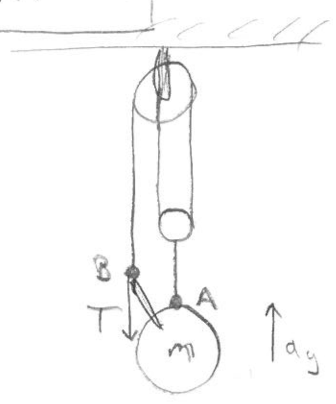
$$(2m + (n-1)m) a = P - T_n$$

$$\Rightarrow T_n = P - (2 + (n-1)) ma \overset{(1)}{=} P - 2 \cdot \frac{P}{12} - (n-1) \cdot \frac{P}{12} =$$

$$= \frac{10}{12} P - \frac{(n-1)}{12} P$$

$$T_{10} = \frac{10P}{12} - \frac{9P}{12} = \frac{P}{12}$$

Uppgift 8.5



Givet

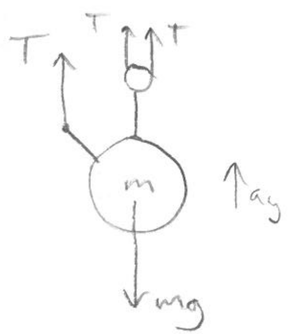
- se figur
- m, T, g

Sökt

- a_y

Obs! Om mannen drar med kraften T i tråden, blir detta även spännkraften i tråden

Frilägg person ~~[illegible]~~

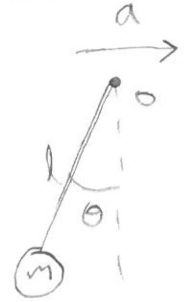


Kraftekv.

$\uparrow: ma_y = 3T - mg$

$$\Rightarrow \boxed{a_y = \frac{3T}{m} - g}$$ Svar

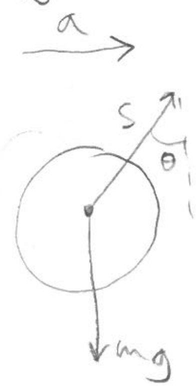
Uppgift 8.6



Givet
- Se figur
- m, l, θ, g

Sökt
- $a(\theta)$

Frilägg kulan



Kraftekvationen $(\bar{F} = m\bar{a})$

$\rightarrow$: $ma = S\sin\theta$ (1)

$\uparrow$: $0 = S\cos\theta - mg$

$\Rightarrow S = \dfrac{mg}{\cos\theta}$ (2)

(1) & (2) $\Rightarrow$

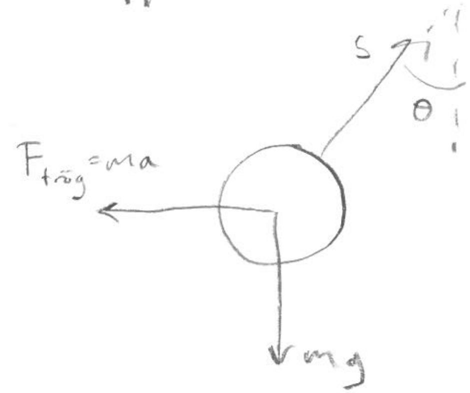
$$ma = \frac{mg}{\cos\theta} \cdot \sin\theta \Rightarrow \boxed{a = g\tan\theta}$$ Svar

om $\theta = 10^\circ$

$\Rightarrow a \approx 0.18g$

Obs! Man kan även räkna talet som en jämvikt i det icke-inertiala/accelererande systemet!

Det uppstår då en fiktiv tröghetskraft $F_{trög}$ som är motriktad tågets acceleration och har beloppet ma.



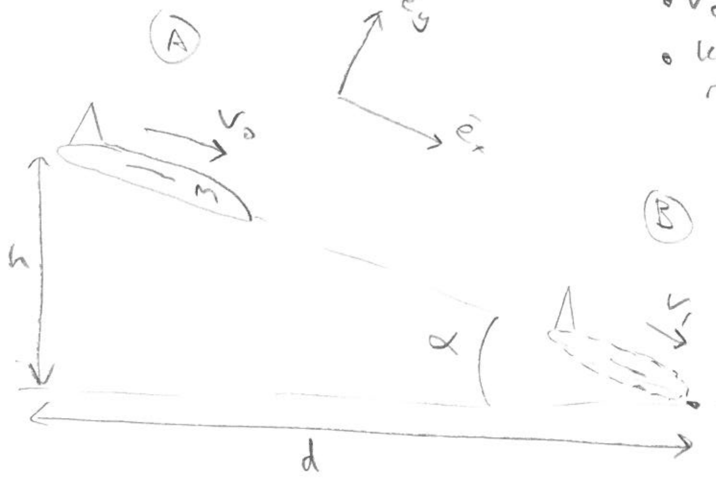
Jämviktsekvationer $(\Sigma\bar{F} = \bar{0})$

$\rightarrow$: $-F_{trög} + S\sin\theta = -ma + S\sin\theta = 0$

$\uparrow$: $S\cos\theta - mg = 0$

Samma ekvationer som (1) & (2)!

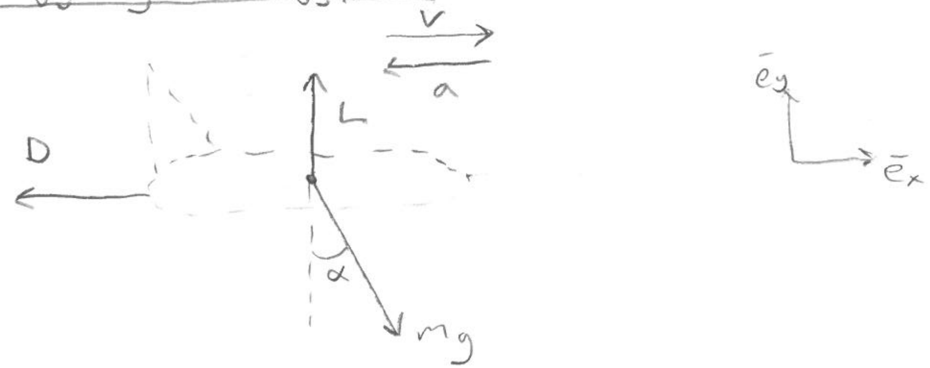
Uppgift 8.10



Givet
- m, d, h
- v_0 & v_1
- konstant retardation från A till B

Sökt
- D (netto-motståndskraften)
- L (lyftkraften)

Frilägging av flygplan

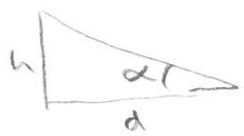


Kraftekvationer

$x: \quad -ma = mg\sin\alpha - D \quad \Rightarrow D = mg\sin\alpha + ma$ (1)

$y: \quad 0 = L - mg\cos\alpha \quad \Rightarrow L = mg\cos\alpha$ (2)

Vad är vinkeln α?



$\tan\alpha = \frac{h}{d}$ (3)

Vad är accelerationen a?

$\ddot{x} = -a$

$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = -a$

Integrera

$\frac{\dot{x}^2}{2} = -ax + C$

Vid $x = x_0$ är $v = v_0$ & vid $x = x_1$ är $v = v_1$

$\Rightarrow \frac{v_1^2}{2} + ax_1 = C = \frac{v_0^2}{2} + ax_0$

$\Rightarrow a(x_1 - x_0) = \frac{v_0^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}$

$\Rightarrow a = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2(x_1 - x_0)}$ (4)

Vad är $x_1 - x_0$?

Pythagoras ger $x_1 - x_0 = \sqrt{h^2 + d^2}$ (5)

(1) $\Rightarrow$

$$D = mg\sin\alpha + \frac{m(v_0^2 - v_1^2)}{2\sqrt{h^2+d^2}}$$

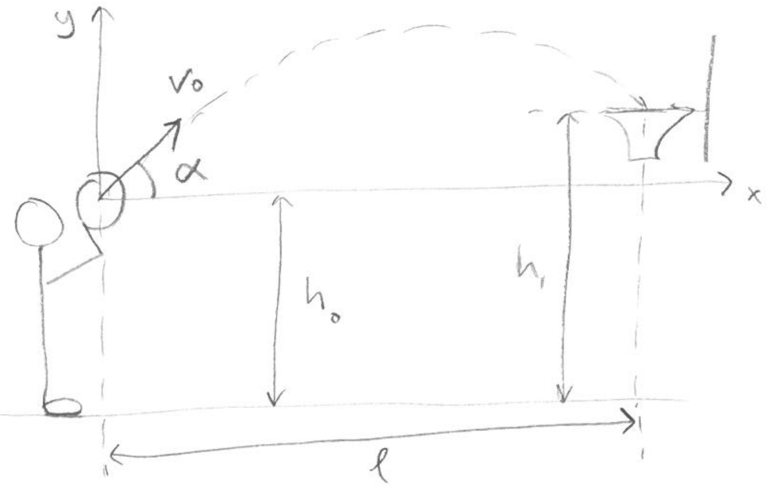
(2) $\Rightarrow$

$$L = mg\cos\alpha$$

(3) $\Rightarrow$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{h}{d}\right)$$

Uppgift 8.17



Givet

- ℓ, α, h_0, h_1

Sökt

- V_0

Kastbana

$\ddot{x} = 0$

$\dot{x} = V_0 \cos\alpha$

$x = V_0 \cos\alpha \, t + \cancel{x_0}^{\,0}$

$\Rightarrow t = \dfrac{x}{V_0 \cos\alpha}$ (1)

$\ddot{y} = -g$

$\dot{y} = -gt + V_0 \sin\alpha$

$y = -\dfrac{gt^2}{2} + V_0 \sin\alpha \, t + \cancel{y_0}^{\,0}$ (2)

(1) & (2) $\Rightarrow$

$$y = -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{V_0\cos\alpha}\right)^2 + \cancel{V_0} \sin\alpha \frac{x}{\cancel{V_0}\cos\alpha} = -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{V_0\cos\alpha}\right)^2 + x\tan\alpha \quad (3)$$

När $x = \ell$ är $y = h_1 - h_0$

(3) $\Rightarrow$

$$h_1 - h_0 = -\frac{g\ell^2}{2V_0^2\cos^2\alpha} + \ell\tan\alpha$$

$$\frac{g\ell^2}{2V_0^2\cos^2\alpha} = \ell\tan\alpha - (h_1 - h_0)$$

$$V_0^2 = \frac{g\ell^2}{2\cos^2\alpha} \cdot \frac{1}{\ell\tan\alpha - (h_1 - h_0)}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_0 = \frac{\ell}{\cos^2\alpha}\sqrt{\frac{g}{2[\ell\tan\alpha - (h_1 - h_0)]}}}$$