Repetition

Kraftekvationen

$\bar{F} = m\bar{a} = \frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \dot{\bar{p}}$ $\quad$ ($\bar{p} = m\bar{v}$ = rörelsemängd)

Momentekvationen

$\bar{M}_o = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d}{dt}[\bar{r} \times m\bar{v}] =$

$= \dot{\bar{H}}_o$ $\quad$ ($\bar{H}_o = \bar{r} \times m\bar{v}$ = rörelsemängdsmoment runt O.)

$\boxed{\bar{F} = \dot{\bar{p}}}$ $\quad$ $\boxed{\bar{M}_o = \dot{\bar{H}}_o}$

Vi multiplicerar kraftekv. med en liten sträcka $d\bar{r}$

$\bar{F} \cdot d\bar{r} = m\frac{d\bar{v}}{dt} \cdot d\bar{r}$

$\bar{F} \cdot d\bar{r} = m\bar{v} \cdot d\bar{v}$ $\quad$ ($d\bar{r} = ds\bar{e}_t$, $\bar{v} = \dot{s}\bar{e}_t$)

$F_t ds = m\dot{s}d\dot{s}$

Vi integrerar från position $A \to B$

$$\underbrace{\int_A^B F_t ds}_{U_{A-B}} = \underbrace{\frac{mv_B^2}{2}}_{T_B} - \underbrace{\frac{mv_A^2}{2}}_{T_A}$$

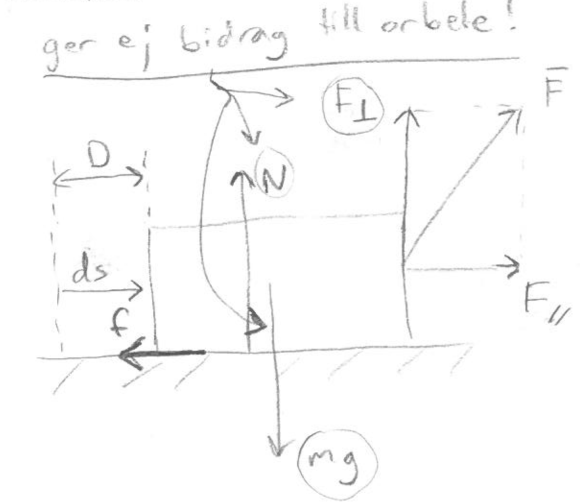
Lagen om kinetisk energi

$\boxed{U_{A-B} = T_B - T_A}$

"En kraft kan utföra ett arbete som i sådant fall ändrar ett föremåls rörelseenergi"

Arbete och energi är skalärer

Exempel



$U_{A-B} = F_{//} \cdot D - f \cdot D$

Om vi nu multiplicerar kraftekv. med en liten tid dt och integrerar från tidpunkt $t_A \to t_B$?

$\longrightarrow$ Dagens övning

Impuls och stöt

$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}$$

$$\Rightarrow \bar{F}dt = d\bar{p}$$

Vi integrerar från tid $t_A \rightarrow t_B$

$$\underbrace{\int_{t_A}^{t_B} \bar{F}\, dt}_{\bar{I}_{A-B} = \text{Impuls}} = \underbrace{\bar{p}(t_B)}_{\bar{p}_B} - \underbrace{\bar{p}(t_A)}_{\bar{p}_A}$$

Impulslagen

$$\boxed{\bar{I}_{A-B} = \bar{p}_B - \bar{p}_A}$$

"En kraft ger en impuls som ändrar ett föremåls rörelsemängd"

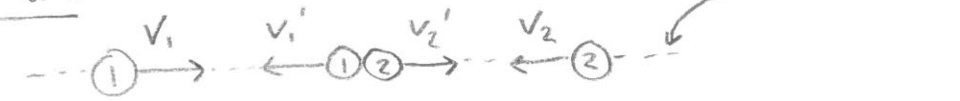
Impuls och rörelsemängd är vektorer!

Om ingen yttre kraft på system

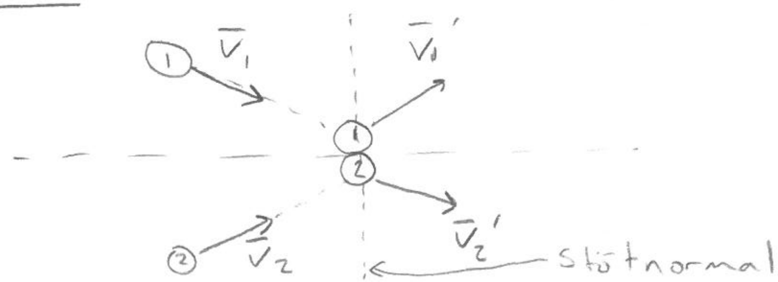
$\bar{I}_{A-B} = \bar{0} \Rightarrow \bar{p}_A = \bar{p}_B$ Rörelsemängd bevaras

Stöt (inga yttre krafter)

rak



sned



Obs! Impuls på ena partikeln bara i stöt-normalriktning! ⇒ Partikelns rörelsemängd bevaras i tangentiell riktning

Ibland förloras kinetisk energi i stöt (pga inre krafters arbete)

Studstal

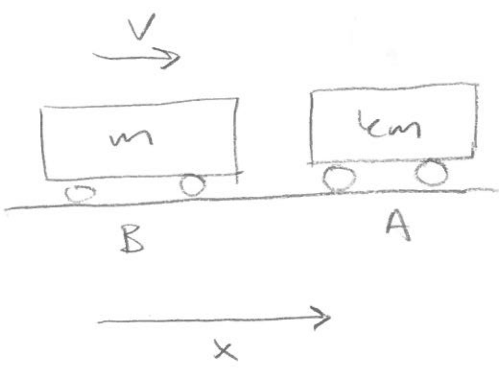
$$e = \frac{V_2' - V_1'}{V_1 - V_2}$$ (I stötnormalriktning!)

Spec. fall

$e = 1 \Rightarrow$ elastisk stöt (kin. energi bevaras)

$e = 0 \Rightarrow$ inelastisk stöt

Uppgift 11.41



Givet

→ m, k, e

→ $V_A = 0$

→ $V_B = V$

Sökt

→ V_A' (efter stöt)

→ V_B'

Inga yttre krafter i x-led ⇒ Rörelsemängd bevaras i x-led!

$\bar{p}^{före} = \bar{p}^{efter} \Rightarrow$ i x-riktn. $p_x^{före} = p_x^{efter}$ (1)

$p_x^{före}$ $\cancel{km}\overset{=0}{V_A} + m\underbrace{V_B}_{=V} = mV$

$p_x^{efter} = kmV_A' + mV_B'$ (2)

(1) & (2) ⇒

$\cancel{m}V = k\cancel{m}V_A' + \cancel{m}V_B'$ (3)

Studstalet ger

$e = \dfrac{V_A' - V_B'}{\underbrace{V_B}_{=V} - \underbrace{V_A}_{=0}} \Rightarrow eV = V_A' - V_B' \Rightarrow V_A' = V_B' + eV$ (4)

(3) & (4) ⇒

$V = k(V_B' + eV) + V_B' = V_B'(1+k) + keV$

$(1-ke)V = (1+k)V_B'$

$\Rightarrow V_B' = \dfrac{1-ke}{1+k}V$ (5)

(3) & (5) ⇒

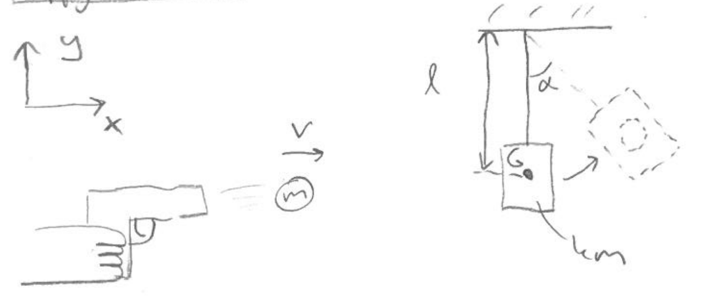
$V = kV_A' + \dfrac{1-ke}{1+k}V$

$\dfrac{(1+k)V}{1+k} - \dfrac{(1-ke)V}{1+k} = kV_A'$

$\dfrac{kV + keV}{1+k} = \cancel{k}V_A'$

$V_A' = \dfrac{1+e}{1+k}V$

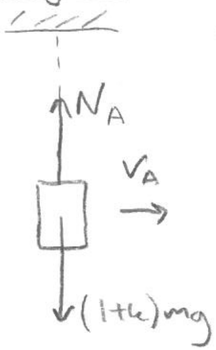
Uppgift 11.7



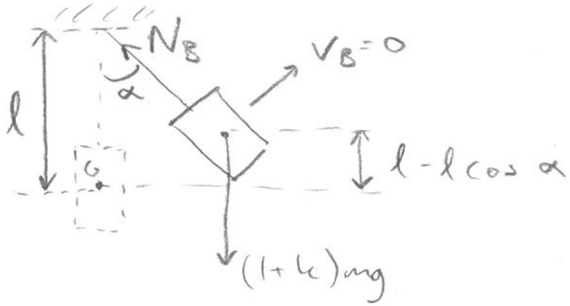
Givet
→ m, α, k, l

Sökt
→ V

Läge A

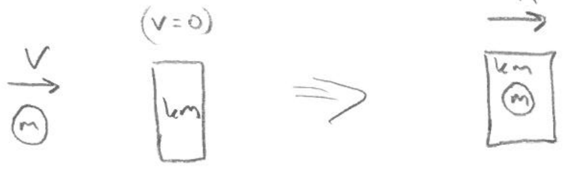


Läge B



Först stöt, sedan Lagen om Kinetisk Energi

Stöt



Före

Efter

(kulan fastnar i säcken)

$e = 0$!

⇒ kinetisk energi förloras!

Inelastisk stöt

Inga yttre krafter i x-riktn.

$$p_x^{före} = p_x^{efter}$$

$$mV = (m + km) V_A \Rightarrow V_A = \frac{V}{1+k} \quad (1)$$

Lagen om kinetisk energi

$$U_{A-B} = T_B - T_A \quad (2)$$

Endast tyngdkraften utför arbete (konservativ)

$$U_{A-B} = U_{A-B,mg} = V_A - V_B = [V = mgy + C] =$$

$$= mg(y_A - y_B) = -mgl(1-\cos\alpha) \quad (3)$$

(1), (2) & (3)

$$-mgl(1-\cos\alpha) = \cancel{\frac{mv_B^2}{2}}^{\,0} - \frac{m}{2}\frac{V^2}{(1+k)^2}$$

$$2(1+k)^2 gl(1-\cos\alpha) = V^2$$

$$\boxed{V = (1+k)\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}}$$

Uppgift 11.7 | Möjlig extension

Givet

→ Konstant motståndskraft F när kulan tränger in i säcken

Sökt

→ Inträngningsdjupet D

Hur mycket kinetisk energi förloras i stöten?

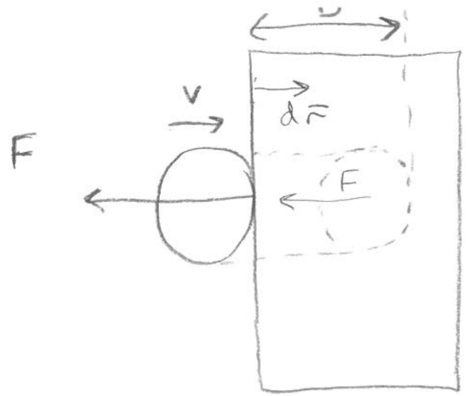
$$T^{före} = \frac{mv^2}{2} \qquad T^{efter} = \frac{(1+k)mv_A^2}{2}$$

$$\Rightarrow T^{efter} - T^{före} = \frac{1+k}{2}mv_A^2 - \frac{mv^2}{2} = \left[1 \Rightarrow v_A = \frac{v}{1+k} \right] =$$

$$= \frac{1+k}{2} m \frac{v^2}{(1+k)^2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{mv^2}{2}\left(\frac{1}{1+k} - 1\right) \quad 4$$

Denna energiförlust motsvarar friktionskraftens arbete!

$$U_{före-efter} = T^{efter} - T^{före} \quad 5$$



$\bar{F}$ är kraft från säck på kula & $d\bar{r}$ är kulans rörelse relativt säcken

(Det går även räkna med $\bar{F}$ som kraften från kulan på säcken & $d\bar{r}$ som säckens rörelse relativt kulan)

Friktionskraftens arbete

$$U_{före-efter} = \int_{före}^{efter} \bar{F} \cdot d\bar{r} = -F \underbrace{\int_{före}^{efter} dr}_{=D} = -FD \quad 6$$

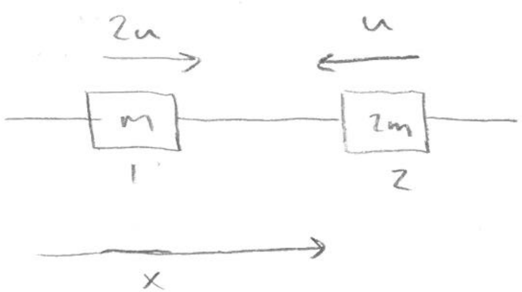
4, 5 & 6 ⇒

$$-FD = \frac{mv^2}{2}\left(\frac{1}{1+k} - 1\right)$$

$$\boxed{D = \frac{mv^2}{2F}\left(1 - \frac{1}{1+k}\right)}$$

Om säcken är tunnare än detta, så kommer den passera igenom utan att fastna (men förstås bromsas)!

Uppgift 11.9



Givet

→ u, m, e

→ Friktionsfritt

→ $V_{1,x} = 2u$

→ $V_{2,x} = -u$

Sökt

→ $V_{1,x}'$ & $V_{2,x}'$

Inga yttre krafter i x-led ⇒ Rörelsemängden bevaras i x-led

$$\bar{p}^{före} = \bar{p}^{efter} \Rightarrow p_x^{före} = p_x^{efter} \quad (1)$$

$$p_x^{före} = mV_{1,x} + 2mV_{2,x} = m \cdot 2u + 2m \cdot (-u)$$

$$= 0$$

$$p_x^{efter} = mV_{1,x}' + 2mV_{2,x}'$$

(1) ⇒

$$0 = mV_{1,x}' + 2mV_{2,x}'$$

$$0 = V_{1,x}' + 2V_{2,x}' \quad (2)$$

Studstalet

$$e = \frac{V_{2,x}' - V_{1,x}'}{V_{1,x} - V_{2,x}} = \frac{V_{2,x}' - V_{1,x}'}{2u - (-u)} = \frac{V_{2,x}' - V_{1,x}'}{3u}$$

$$V_{2,x}' = V_{1x}' + 3ue \quad (3)$$

(2) & (3) ⇒

$$0 = V_{1,x}' + 2(V_{1,x}' + 3ue)$$

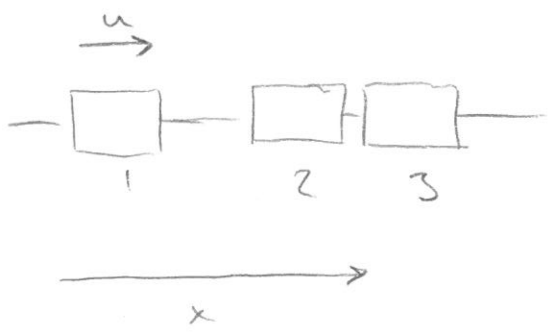
$$-6ue = 3V_{1,x}'$$

$$\underline{\underline{V_{1,x}' = -2eu}} \quad (4)$$ (minustecken anger negativ x-riktning)

(3) & (4) ⇒

$$\underline{\underline{V_{2,x}' = -2eu + 3eu = eu}}$$

Uppgift 11.10



Givet

→ Identiska cylindrar (antag massa m)

→ u, e

Sökt

→ V_3'' (efter andra stöten)

Inga yttre krafter i x-led ⇒ Rörelsemängd bevaras i x

$$p_x^{före} = p_x^{efter}$$

Första stöten

$$\cancel{m}u + 0 = \cancel{m}v_1' + \cancel{m}v_2'$$

$$v_2' = u - v_1' \quad (1)$$

Andra stöten

$$\cancel{m}v_2' + 0 = \cancel{m}v_2'' + \cancel{m}v_3''$$

$$V_3'' = V_2' - V_2'' \quad (2)$$

Studstal

Första stöten

$$e = \frac{V_2' - V_1'}{\underbrace{V_1}_{=u} - \underbrace{V_2}_{=0}}$$

$$\Rightarrow V_1' = V_2' - eu \quad (3)$$

(1) & (3) ⇒

$$V_2' = u - (V_2' - eu)$$

$$2V_2' = u(1+e) \Rightarrow V_2' = \frac{1+e}{2}u \quad (4)$$

Studstal, andra stöten

$$e = \frac{V_3'' - V_2''}{\underbrace{V_2'}_{(4)} - \underbrace{V_3'}_{=0}}$$

$$\frac{1+e}{2}eu = V_3'' - V_2'' \Rightarrow V_2'' = V_3'' - \frac{1+e}{2}eu \quad (5)$$

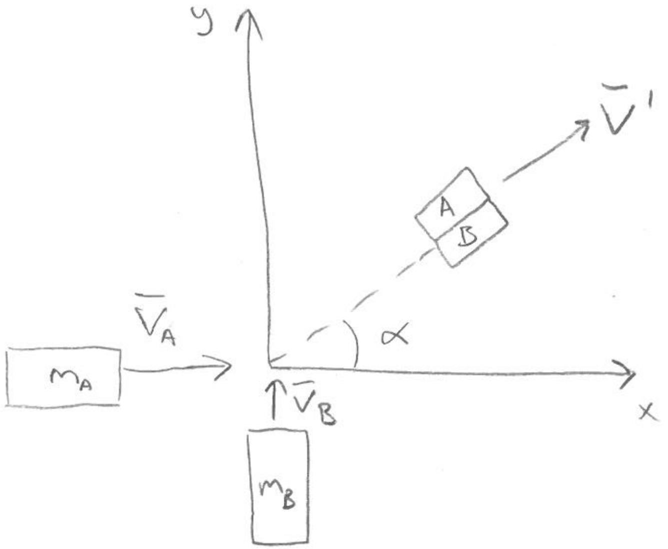
(2), (4), (5) ⇒

$$V_3'' = \frac{1+e}{2}u - V_3'' + \frac{1+e}{2}eu$$

$$4V_3'' = u\left[1+e+e+e^2\right] = u(e^2+2e+1) = u(1+e)^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{V_3'' = u\left(\frac{1+e}{2}\right)^2}}$$

Uppgift 11.15



Givet

- m_A, m_B
- $\bar{V}_A = V_A \bar{e}_x$
- $\bar{V}_B = V_B \bar{e}_y$

Sökt

- $V' = |\bar{V}'|$
- α

Inga yttre krafter i x,y-planet
$\Rightarrow$ rörelsemängd bevaras i x & y-led!

$$\bar{P}_{före} = \bar{P}_{efter} \Rightarrow \begin{array}{ll} P_x^{före} = P_x^{efter} & (1) \\ P_y^{före} = P_y^{efter} & (2) \end{array}$$

$P_x^{före} = m_A V_A$

$P_x^{efter} = (m_A + m_B) V' \cos\alpha$

(1) $\Rightarrow$ $m_A V_A = (m_A + m_B) V' \cos\alpha$ (3)

$P_y^{före} = m_B V_B$

$P_y^{efter} = (m_A + m_B) V' \sin\alpha$

(2) $\Rightarrow$

$m_B V_B = (m_A + m_B) V' \sin\alpha$ (4)

(4) dividerat med (3) $\Rightarrow$

$$\frac{m_B V_B}{m_A V_A} = \frac{\cancel{(m_A + m_B)V'}}{\cancel{(m_A + m_B)V'}} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{m_B V_B}{m_A V_A}$$

(3) $\Rightarrow$

$$V_x' = V' \cos\alpha = \frac{m_A V_A}{m_A + m_B}$$

(4) $\Rightarrow$

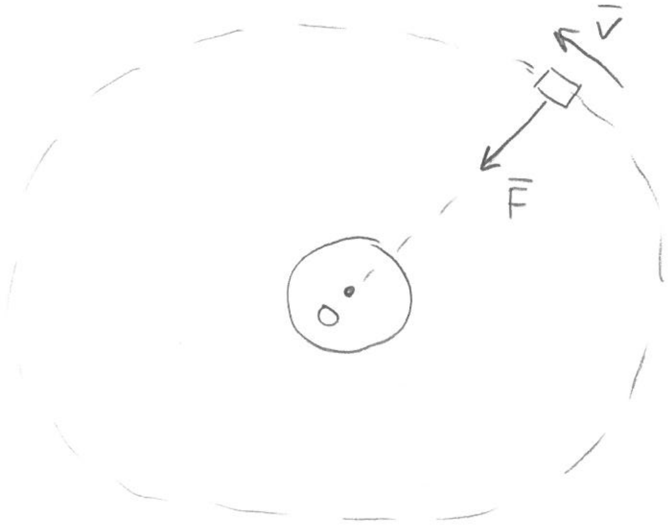
$$V_y' = V' \sin\alpha = \frac{m_B V_B}{m_A + m_B}$$

Beloppet

$$V' = \sqrt{(V_x')^2 + (V_y')^2} = \sqrt{\frac{m_A^2 V_A^2 + m_B^2 V_B^2}{(m_A + m_B)^2}}$$

$$V' = \frac{\sqrt{m_A^2 V_A^2 + m_B^2 V_B^2}}{m_A + m_B}$$

Centralkraftsrörelse | Specialfall av kap 10



Kraften $\bar{F}$ ger aldrig något moment runt O

$$\boxed{\bar{M}_0 = \dot{\bar{H}}_0 = \bar{0} \Rightarrow \bar{H}_0 = \text{konstant}}$$

Om $\bar{F}$ är gravitationskraften (som är konservativ)

$$U_{A-B} = V_A - V_B = \left[V = \frac{GMm}{r} + C_1 = \frac{mgR^2}{r} + C_1 \right] =$$

$$= \frac{mgR^2}{r} - \frac{mgR^2}{r}$$