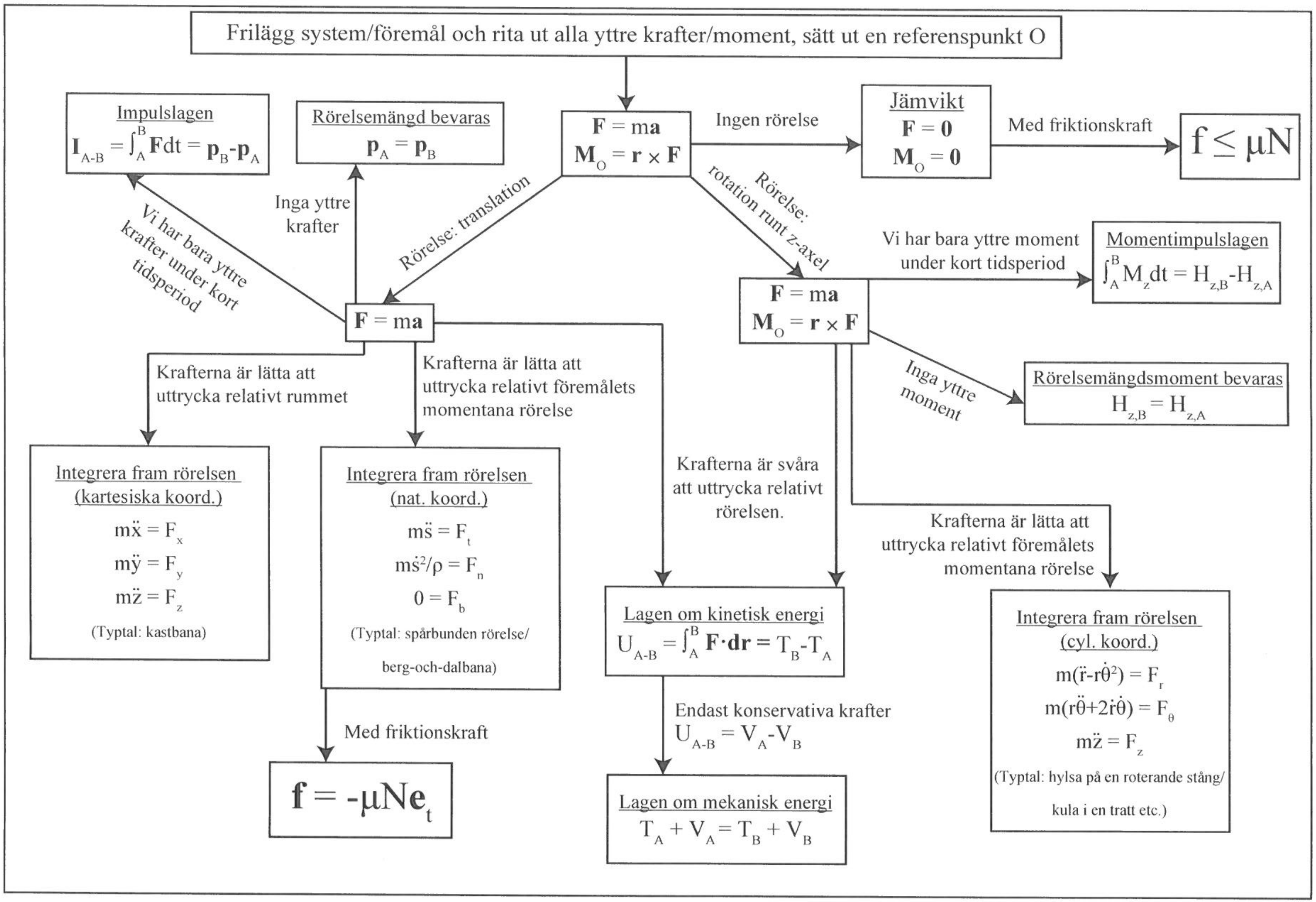
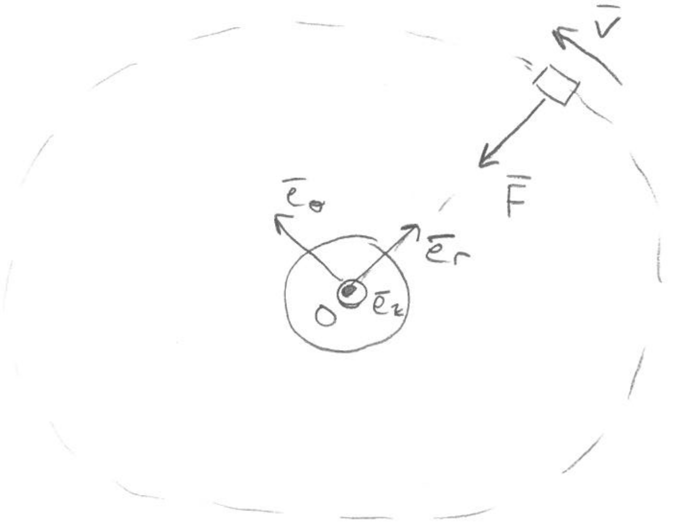


Frilägg system/föremål och rita ut alla yttre krafter/moment, sätt ut en referenspunkt O
$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
Ingen rörelse
Jämvikt
$\mathbf{F} = \mathbf{0}$
$\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$
Med friktionskraft
$f \leq \mu N$
Rörelse: translation
Rörelse: rotation runt z-axel
$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$
Vi har bara yttre krafter under kort tidsperiod
Impulslagen
$\mathbf{I}_{A\text{-}B} = \int_A^B \mathbf{F}dt = \mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A$
Inga yttre krafter
Rörelsemängd bevaras
$\mathbf{p}_A = \mathbf{p}_B$
Krafterna är lätta att uttrycka relativt rummet
Integrera fram rörelsen (kartesiska koord.)
$m\ddot{x} = F_x$
$m\ddot{y} = F_y$
$m\ddot{z} = F_z$
(Typtal: kastbana)
Krafterna är lätta att uttrycka relativt föremålets momentana rörelse
Integrera fram rörelsen (nat. koord.)
$m\ddot{s} = F_t$
$m\dot{s}^2/\rho = F_n$
$0 = F_b$
(Typtal: spårbunden rörelse/ berg-och-dalbana)
Med friktionskraft
$\mathbf{f} = -\mu N\mathbf{e}_t$
Krafterna är svåra att uttrycka relativt rörelsen.
Lagen om kinetisk energi
$U_{A\text{-}B} = \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = T_B - T_A$
Endast konservativa krafter
$U_{A\text{-}B} = V_A - V_B$
Lagen om mekanisk energi
$T_A + V_A = T_B + V_B$
$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
Vi har bara yttre moment under kort tidsperiod
Momentimpulslagen
$\int_A^B M_z dt = H_{z,B} - H_{z,A}$
Inga yttre moment
Rörelsemängdsmoment bevaras
$H_{z,B} = H_{z,A}$
Krafterna är lätta att uttrycka relativt föremålets momentana rörelse
Integrera fram rörelsen (cyl. koord.)
$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r$
$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta$
$m\ddot{z} = F_z$
(Typtal: hylsa på en roterande stång/ kula i en tratt etc.)

$\boxed{\text{Centralkraftsrörelse}}$ Spec.fall av kap 10



Kraften $\bar{F}$ ger aldrig något moment runt O

$$\boxed{\bar{M}_O = \dot{\bar{H}}_O = \bar{0} \Rightarrow \bar{H}_O = \text{konstant}}$$

Om $\bar{F}$ är gravitationskraften (som är konservativ)

$$U_{A-B} = V_A - V_B = \left[V_{grav} = -\frac{GMm}{r} + C = -\frac{mgR^2}{r} + C_1 \right] =$$

$$= \frac{mgR^2}{r_B} - \frac{mgR^2}{r_A}$$

$$\boxed{\bar{F}_{grav} = -\frac{GMm}{r^2}\bar{e}_r = -\frac{mgR^2}{r^2}\bar{e}_r}$$

Dessa två grundprinciper leder till ALLA extra formler i kap 12, t.ex. "hastighetsformeln 12.44"

Så när ni löser uppgifter i kapitel 12 förväntas ni starta med:

1) $\bar{H}_O = \text{konstant}$

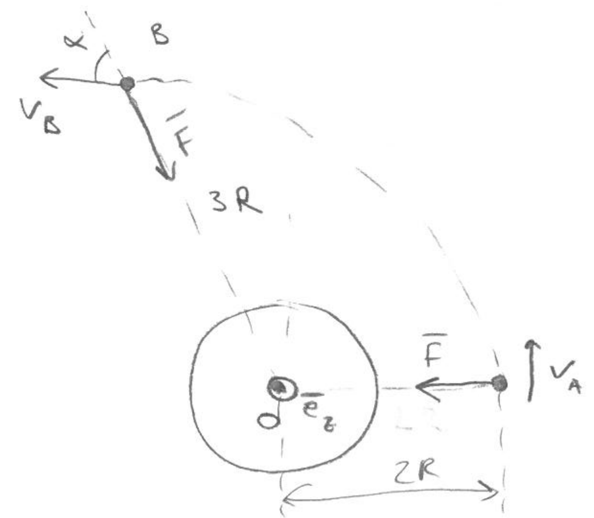
2) $T_B - T_A = V_A - V_B$ (alltså $T_A + V_A = T_B + V_B$)

(där ni vet att $\bar{F} = -\frac{mgR^2}{r^2}\bar{e}_r$ och $V = -\frac{mgR^2}{r} + C_1$)

Starta alltså <u>inte</u> med:

"Hastighetsformeln 12.44 säger att ..."

Uppgift 12.6



<u>Givet</u>

- g, R, α

<u>Sökt</u>

- v_B

<u>Centralkraftsrörelse</u> $(M_z = 0 \Rightarrow H_z = \text{konstant})$

$$H_z^{(A)} = H_z^{(B)} \quad (1)$$

$$H_z^{(A)} = 2R \cdot m v_A$$

$$H_z^{(B)} = 3R \cdot m v_B \sin\alpha$$

(1) $\Rightarrow$

$$2\cancel{R}\cancel{m} v_A = 3\cancel{R}\cancel{m} v_B \sin\alpha$$

$$v_A = \frac{3}{2} v_B \sin\alpha \quad (2)$$

<u>Energin bevaras</u> (gravitationskraften är konservativ)

$$T_A + V_A = T_B + V_B \quad (3)$$

$$T_A = \frac{m v_A^2}{2}, \quad T_B = \frac{m v_B^2}{2}$$

$$V_A = -\frac{GMm}{2R} = [GM = gR^2] = -\frac{mgR}{2}$$

$$V_B = -\frac{mgR^2}{3R} = -\frac{mgR}{3}$$

(3) $\Rightarrow$

$$\frac{\cancel{m} v_A^2}{2} - \frac{\cancel{m} gR}{2} = \frac{\cancel{m} v_B^2}{2} - \frac{\cancel{m} gR}{3}$$

$$v_B^2 = v_A^2 - gR + \frac{2}{3} gR = v_A^2 - \frac{gR}{3} \quad (4)$$

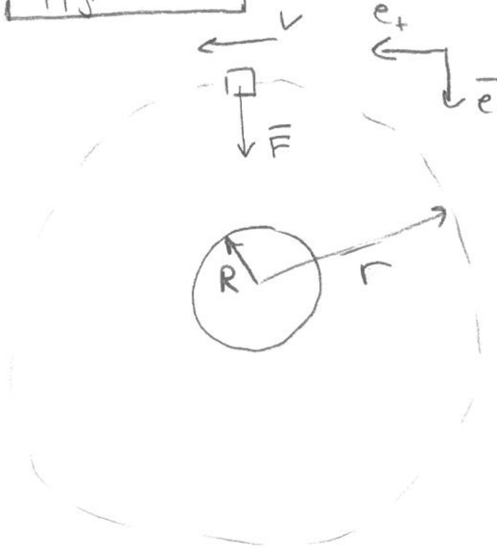
(2) & (4)

$$v_B^2 = \frac{9}{4} v_B^2 \sin^2\alpha - \frac{gR}{3}$$

$$v_B^2 \left(\left[\frac{9}{4} \sin^2\alpha - 1\right] \right) = \frac{gR}{3}$$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{gR}{3\left[\frac{9}{4}\sin^2\alpha - 1\right]}}$$

Uppgift 12.7



$\bar{e}_t$ $\bar{e}_n$

Givet
- g, R, r

Sökt
- τ

Periodtiden

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v} \quad (1)$$

Kraften

$$\bar{F} = \frac{GMm}{r^2}\bar{e}_n = \left[\cancel{m}g = \frac{GM\cancel{m}}{R^2} \Rightarrow GM = gR^2\right] =$$

$$= \frac{mgR^2}{r^2}\bar{e}_n$$

Kraftekv.

$$\bar{e}_n: \frac{\cancel{m}v^2}{\cancel{r}} = \cancel{m}g\frac{R^2}{r^{\cancel{2}}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g}{r}}R \quad (2)$$

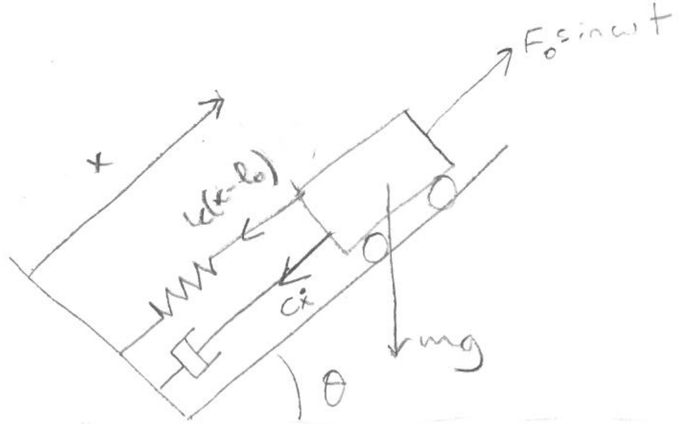
(1) & (2) $\Rightarrow$

$$\tau = 2\pi r \cdot \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{g}}\frac{1}{R} = 2\pi\frac{r^{3/2}}{\sqrt{g}R}$$

Om $r = 2R$ & $R = 6731$ km

$$\tau = 2\pi \cdot \frac{(2R)^{3/2}}{\sqrt{g}R} = 2^{3/2} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 239 \text{ min}$$

Svängningar



Kraftekvationen ger:

$$m\ddot{x} = -mg\sin\theta - c\dot{x} - k(x-l_0) + F_0\sin\omega t$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t + \underbrace{\frac{k}{m}l_0 - g\sin\theta}_{\text{statiska krafter}}$$

(Om vi skulle definiera $x=0$ då systemet i j.v.
$\Rightarrow$ Statiska krafter elimineras!)

Allmän svängningsekvation

$$\boxed{\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\xi\omega_n = \frac{c}{m} \\ \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

Egenfrekvens

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\omega_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Periodtid

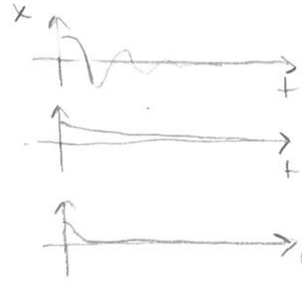
$$\tau_n = \frac{1}{f_n}$$

Dämpning

$\xi < 1$ Svag

$\xi > 1$ Stark

$\xi = 1$ Kritisk



Obs!

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Påtvingad svängning ($F_0 \neq 0$)

Amplitud (m. dämpning) $\left(k_{eff} = m\omega_n^2\right)$

$$X = \frac{F_0/k_{eff}}{\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2 + \left[2\xi\omega/\omega_n\right]^2}}$$

Amplitud utan dämpning

$$X = \frac{F_0/k_{eff}}{1-(\omega/\omega_n)^2} \Rightarrow$$

Resonans

$$\boxed{\omega = \omega_n}$$

Förstoringsfaktor

$$M = \frac{|X|}{(F_0/k)}$$

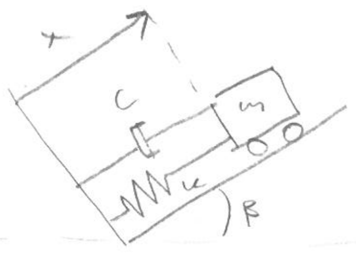
Kom ihåg hur man löser diff.ekvationer!

T.ex. $\ddot{x} + \omega_n^2 x = C$

$$x = \underbrace{A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t}_{\text{Homogen lösning}} + \underbrace{\frac{C}{\omega_n^2}}_{\text{Partikulärlösning}}$$

Varför elimineras statiska krafter då man sätter $x=0$ i jämvikt?

Betrakta problemet



Svängningsekvation

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \underbrace{\frac{k}{m}l_0 - g\sin\theta}_{\text{konstant (ej beroende av } x,\dot{x},\ddot{x} \text{ eller } t)} \quad (1)$$

Anta att vi har jämvikt $\ddot{x} = \dot{x} = 0$ vid x_{jv}

---

(1) $\Rightarrow$

$$\frac{k x_{jv}}{m} = \frac{k}{m}l_0 - g\sin\theta$$

$$x_{jv} = l_0 - \frac{mg}{k}\sin\theta \quad (2)$$

Om vi definierar $x=0$ i jämvikt, dvs $x_{jv}=0$

---

(2) $\Rightarrow$ $$l_0 = \frac{mg}{k}\sin\theta \quad (3)$$

Vi får ett uttryck för l_0!

(3) & (1) $\Rightarrow$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}\cdot\frac{mg}{k}\sin\theta - g\sin\theta$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

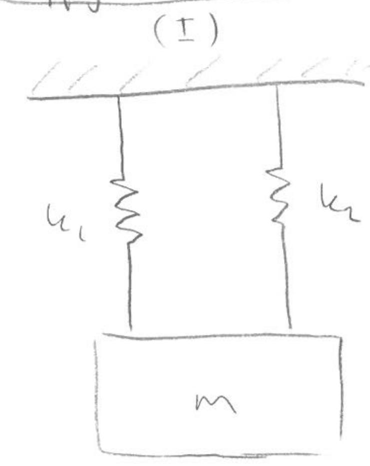
Vi får samma vänsterled som i (1), men de konstanta termerna i högerledet har eliminerats!

Slutsats: Genom att variera vad vi definierar som $x=0$ ändras endast den konstanta termen i svängningsekvationen.

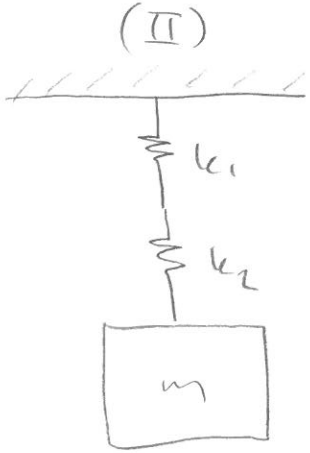
Väljer vi att $x=0$ då systemet är i jämvikt, kommer den konstanta termen vara lika med noll

Uppgift 13.4

(I)



(II)



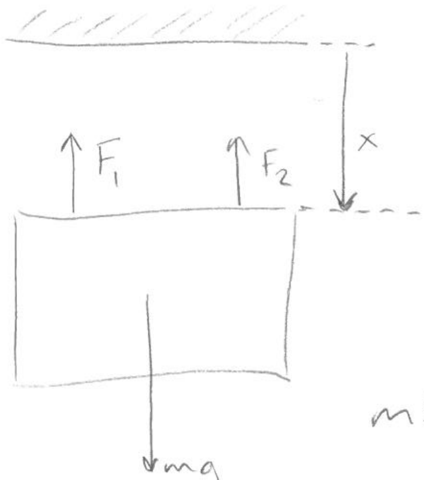
Givet

- k_1, k_2, m

Sökt

- Vad är effektiva fjäderkonstanten k i de två respektive fallen?

Friläggning fall I



Samma längd för båda fjädrarna!

$$F_1 = k_1(x - l_{0,1})$$

$$F_2 = k_2(x - l_{0,2})$$

Kraftekvationen

$$m\ddot{x} = mg - k_1(x - l_{0,1}) - k_2(x - l_{0,2})$$

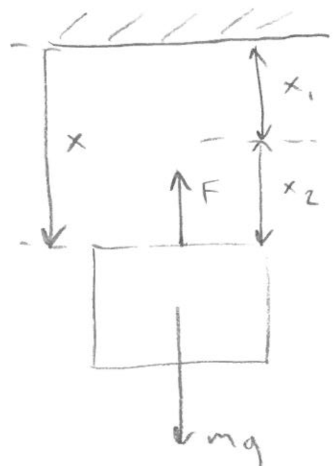
$$\Rightarrow \ddot{x} + \underbrace{\frac{k_1 + k_2}{m}}_{=\omega_n^2} x = \underbrace{\frac{g + k_1 l_{0,1} + k_2 l_{0,2}}{m}}_{\text{statiska!}}$$

För att matcha samma ω_n med endast en fjäder med fjäderkonstant k:

$$\omega_{n,\text{en fjäder}}^2 = \omega_{n,\text{två fjädrar}}^2$$

$$\frac{k}{m} = \frac{k_1 + k_2}{m} \Rightarrow \boxed{k = k_1 + k_2}$$

Friläggning fall II



Samma kraft för båda fjädrarna!

$$F = k_1(x_1 - l_{0,1}) = k_2(x_2 - l_{0,2}) \quad (1)$$

$$x = x_1 + x_2 \quad (2)$$

(1) & (2) $\Rightarrow$

$$k_1((x - x_2) - l_{0,1}) = k_2(x_2 - l_{0,2})$$

$$k_1 x - k_1 x_2 - k_1 l_{0,1} = k_2 x_2 - k_2 l_{0,2}$$

$$(k_1 + k_2)x_2 = k_1 x + k_2 l_{0,2} - k_1 l_{0,1}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} x + \frac{k_2 l_{0,2} - k_1 l_{0,1}}{k_1 + k_2} \quad (3)$$

Kraftekvationen

$$m\ddot{x} = mg - F \overset{(1)}{=} mg - k_2(x_2 - l_{0,2}) \overset{(3)}{=}$$

$$= mg - k_2\left[\frac{k_1}{k_1 + k_2} x + \frac{k_2 l_{0,2} - k_1 l_{0,1}}{k_1 + k_2} - l_{0,2}\right]$$

$\boxed{\text{Uppgift 13.4}}$ forts.

Skriv som svängningsekv.

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{1}{m}\left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right)}_{=\omega_n^2} x = g - \underbrace{\frac{k_2}{m}\left[\frac{k_2 l_{0,2} - k_1 l_{0,1}}{k_1 + k_2} - l_{0,2}\right]}_{\text{statiska!}}$$

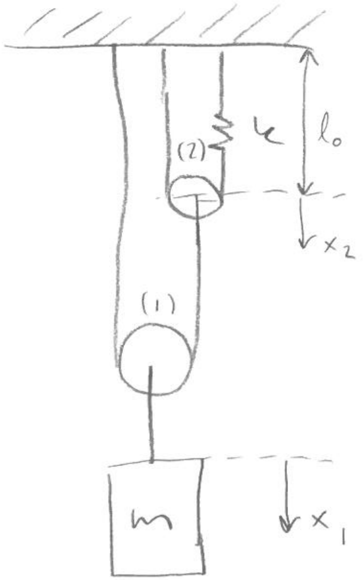
Som förut

$$\frac{k}{\cancel{m}} = \frac{1}{\cancel{m}}\left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right) \Rightarrow k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

eller

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Uppgift 13.7



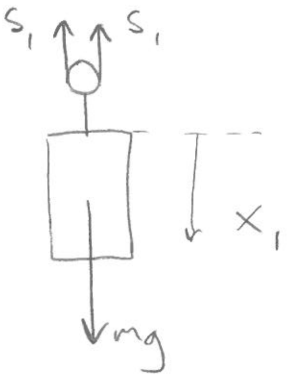
Givet

- k, m

Sökt

- $\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$

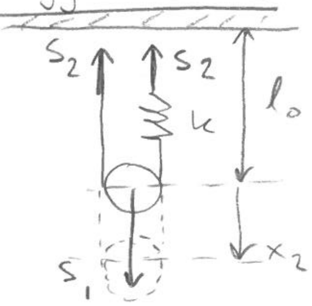
Frilägg massa



Kraftekvationen

$$m\ddot{x}_1 = mg - 2S_1 \quad (1)$$

Frilägg trissa 2



Om trissan förflyttas x_2, blir fjäderns förlängning $2x_2$!

$$S_2 = k \cdot (2x_2) \quad (2)$$

Kraftekvationen på trissan

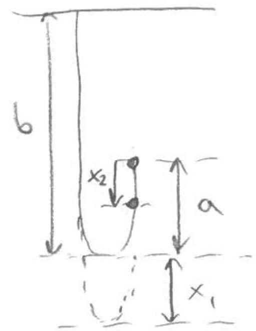
$$\cancel{m_{trissa}}^{\,0}\,\ddot{x}_2 = S_1 - 2S_2$$

$$\Rightarrow S_1 = 2S_2 \overset{(2)}{=} 4kx_2 \quad (3)$$

(1) & (3) $\Rightarrow$

$$m\ddot{x}_1 = mg - 8kx_2 \quad (4)$$

Hur hänger x_1 & x_2 ihop?



Trådvillkor

$$L = a + \cancel{b} = a - x_2 + 2x_1 + \cancel{b}$$

$$x_2 = 2x_1 \quad (5)$$

(4) & (5) $\Rightarrow$

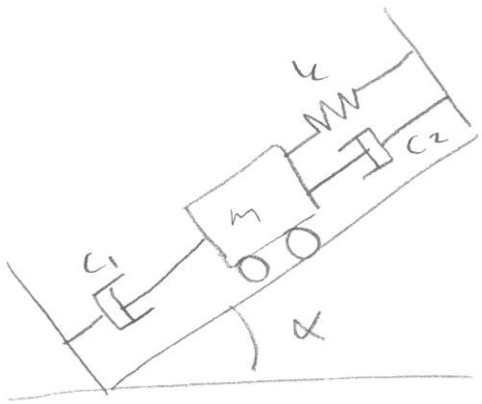
$$m\ddot{x}_1 = mg - 16kx_1$$

$$\ddot{x}_1 + \underbrace{\frac{16k}{m}}_{\omega_n^2} x_1 = g \quad \Rightarrow$$

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{16k}} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Uppgift 13.11 forts.



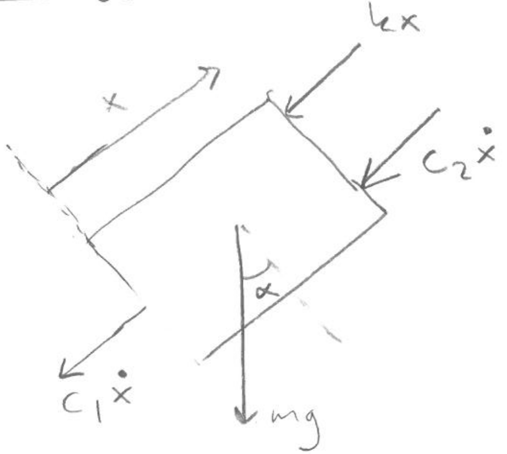
Givet

- m, g, α, k, c_1 & c_2

Sökt

- Vad är Δl av fjädern vid jämvikt?
- c_1 & c_2 krit. för svag dämpning $\xi < 1$
- $\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$

Frilägg vagn (fjädern har nat. längd vid $x=0$)



Kraftj.v. vid $x = -\Delta l$ $(\dot{x} = 0)$

$$mg\sin\alpha + k(-\Delta l) = 0$$

$$\boxed{\Delta l = \frac{mg}{k}\sin\alpha}$$ delsvar

Kraftekv.

$$m\ddot{x} = -kx - mg\sin\alpha - c_2\dot{x} - c_1\dot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \underbrace{\frac{c_1+c_2}{m}}_{=2\xi\omega_n}\dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{=\omega_n^2}x = \underbrace{mg\sin\alpha}_{\text{statisk}}$$

Vi har alltså

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1)$$

$$2\xi\omega_n = \frac{c_1+c_2}{m} \overset{(1)}{\Rightarrow} \xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\,\frac{c_1+c_2}{m} = \frac{1}{2\sqrt{mk}}\,c_1+c_2 \quad (2)$$

Svag dämpning

$$\xi < 1 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{mk}}(c_1+c_2) < 1$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1 + c_2 < 2\sqrt{mk}}$$ delsvar

Periodtiden

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2\ \xi^2\omega_n^2}} \overset{(1)\&(2)}{=} \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{mk}{4m}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{c_1+c_2}{m}\right)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_d = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c_1+c_2}{2m}\right)^2}}}$$ delsvar